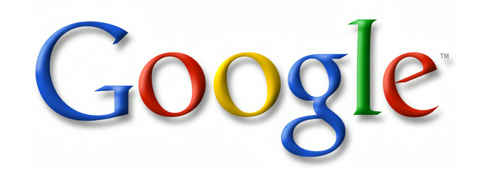
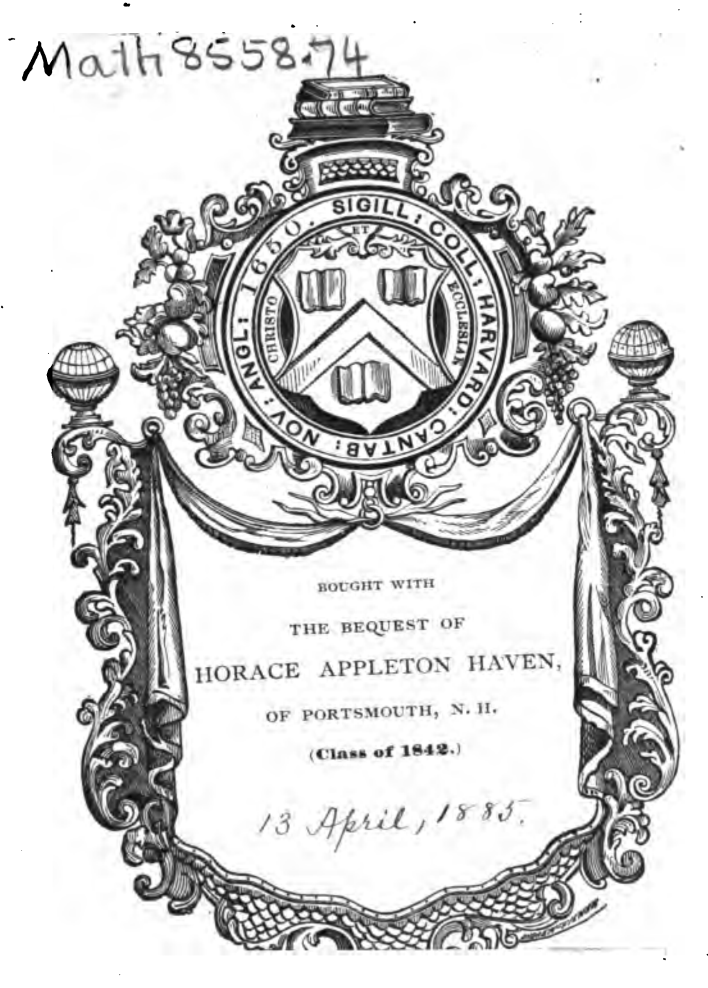





SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842.)
13 April, 1885.

ELEMENTE

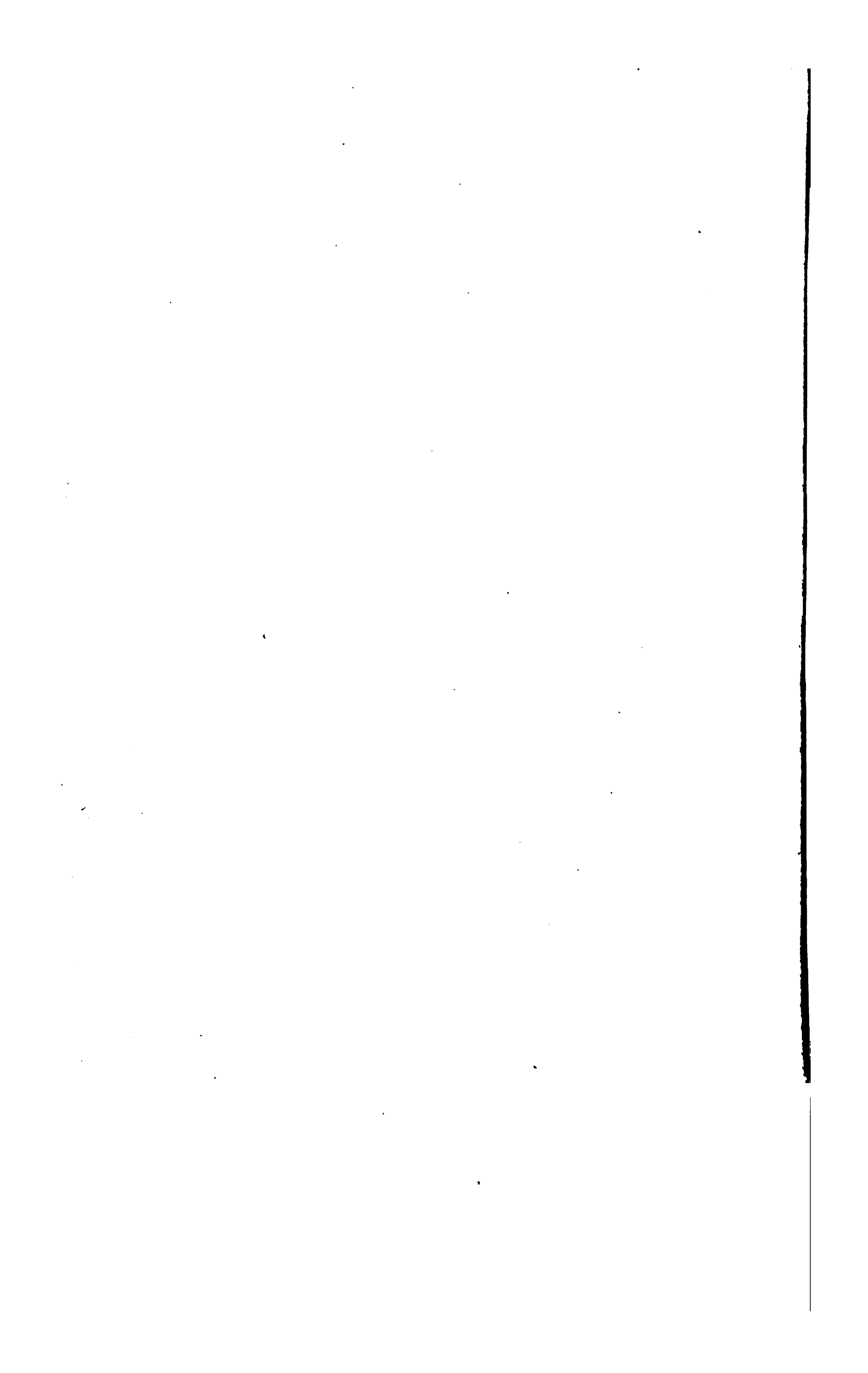
DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER EBENE

IN

TRILINEAREN COORDINATEN.



ELEMENTE

DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER EBENE

IN

TRILINEAREN COORDINATEN.

FÜR MATHEMATIKER UND STUDIRENDE.

VON

LEOPOLD SCHENDEL.

JENA,
HERMANN COSTENOBLE.
1874.

Vorwort.

Im Sommer 1870 wurde ich in Berlin durch eine analytisch-geometrische Untersuchung darauf geführt, dass sich als Coordinaten des Punktes mehr als seine senkrechten Abstände von den Seitenlinien eines Dreiecks die von ihm mit den Eckpunkten desselben bestimmten Dreiecksflächen empfehlen, und lege nunmehr die nach dieser Erkenntniss unternommene Darstellung der Elemente der analytischen Geometrie der Ebene in diesem Werke dem mathematischen Publikum vor. Durch dasselbe wird der analytischen Geometrie eine allgemeinere Gestalt gegeben; das eingeführte und durch die ganze Schrift hindurch angewandte Coordinatensystem lässt das Prinzip der Dualität zwischen Punkt und Grade in seiner ganzen Vollständigkeit und Allgemeinheit hervortreten und ermöglicht, um dieses besonders hervorzuheben, eine einheitliche Untersuchungsmethode der Kegelschnitte, durch die auch auf deren Gebiete in mehrfacher Beziehung eine merkwürdige Dualität zu Tage tritt. Dass ich dadurch genöthigt wurde, viele Bezeichnungen zu ändern und neu einzuführen, wird man zugeben und wünsche ich nur, dass ich hierin glücklich gewesen bin. Die Theorie der Kegelschnitte ist, wie schon angedeutet, in dieser Schrift in einer neuen Weise dargestellt, und hoffe ich, dass diese besonders den Beifall des mathematischen Publikums finden wird, wenngleich ich mir nicht verhehle, dass vielleicht insbesondere eine zu geringe Berücksichtigung der Arbeiten Anderer mir zum Vorwurf gemacht werden wird; denn in meiner ländlichen Einsamkeit stand mir im Grossen und Ganzen nur die treffliche Salmon-Fiedlersche „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“,

die, wie ich mit Dank gegen die Urheber dieses Werkes es ausspreche, meine Lehrerin und Rathgeberin gewesen ist, zu Gebote. Es berechtigt mich zu dieser Hoffnung wohl auch der Umstand, dass durch diese Darstellung mancherlei interessante Fragen angeregt werden. Eine vollständig abgeschlossene Geometrie, soweit eine solche überhaupt möglich ist, konnte ich nicht geben, es bleibt noch viel zu thun. Dabei sei in dieser Hinsicht mir hier noch die Bemerkung gestattet, dass es auf der unendlich fernen Graden zwei Punkte giebt, die, von ähnlicher Bedeutung wie die imaginären Kreispunkte, bei analytisch-geometrischen Untersuchungen als Repräsentanten der unendlich fernen Punkte aller hyperbolischen Kreise (gleichseitigen Hyperbeln) angesehen werden können. Ich konnte das Nähere über diese Punkte, durch welche die cyclisch-hyperbolischen Functionen in die analytische Geometrie eintreten, nicht in dieses Werk aufnehmen, weil ich deren Bedeutung erst nach Vollendung desselben erkannt habe, und werde es nunmehr zugleich mit einer Abhandlung veröffentlichen, in der die Bernoullischen Functionen in elementarer, ihrer Natur entsprechender Weise discutirt und im Anschluss daran aus dem Taylorschen Theoreme vermittelst zweier Sätze, nach denen sich eine Potenz durch nach Bernoullischen Functionen fortschreitende endliche Reihen darstellen lässt, zwei für die höhere Analysis bedeutungsvolle Theoreme nebst einigen Anwendungen abgeleitet werden. Beide Arbeiten sind bereits druckfertig und werden in nächster Zeit unter dem Titel: „Die Bernoullischen Functionen und das Taylorsche Theorem, nebst einem Beitrage zur analytischen Geometrie der Ebene in trilinearen Coordinaten.“ dem mathematischen Publikum vorgelegt werden.

Koerberrode, Kreis Graudenz, im October 1873.

Leopold Schendel.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Theil.

Erstes Kapitel.

Der Punkt und die Grade. Das Prinzip der Dualität.

Abschnitt | Seite

1. Lagenbestimmung des Punktes und der Graden in Bezug auf ein Dreieck. Coordinaten, Form und Gleichung derselben 1
3. Die Lagenbestimmung in Bezug auf zwei Grade. Das Cartesische Coordinatensystem 4
4. Die Verbindungslinie zweier Punkte und der Durchschnittspunkt zweier Graden. Bestimmung und Bezeichnung eines jeden dritten Punktes derselben und resp. einer jeden dritten Graden desselben 6
5. Die von zwei Graden gebildeten Winkel 6
6. Die Tangente, der Sinus und Cosinus des Winkels zweier Graden. Parallelität und Orthogonalität. Die unendlich ferne Grade. Der Orthogonalpunkt der Graden. Die Winkelhalbirungslinien eines Punktes in Bezug auf zwei Grade. Die Entfernung zweier Punkte. Die Entfernungsconstante der Graden. Die Mittelpunkte einer Graden in Bezug auf zwei Punkte. Relationen zwischen den Winkeln dreier Graden eines Punktes und zwischen den Entfernungen dreier Punkte einer Graden 7
9. Der Schwerpunkt des Fundamentaldreiecks. Der endlich ferne Punkt 15
10. Der Winkel zweier Punkte und die Entfernung zweier Graden. Den Seiten und Winkeln des Fundamentaldreiecks entsprechende Grössen. Kennzeichen für die Lage eines Punktes in Bezug auf eine Grade 15
11. Der senkrechte und Parallelabstand des Punktes von der Graden und der Graden von dem Punkte 18
12. Verschiedenartige Bedeutung der Coordinaten. Das Prinzip der Dualität. Reciprocität zwischen Entfernung und Winkelfunctionen. Die Constanten des trilinearen Coordinatensystems 20

Zweites Kapitel.

Der Schwerpunkt und der Kreis der mittleren quadratischen Entfernungen materieller Punkte. Das Dreieck. Von der Reciprocität und Collineation. Die Coordinatentransformation.

Abschnitt		Seite
13.	Der Schwerpunkt und der Kreis der mittleren quadratischen Entfernungen materieller Punkte. Der Specialfall zweier Punkte. Stewarts Theorem. Harmonische Punkte	26
14.	Die Coordinaten der Eckpunkte und Seitenlinien des Dreiecks. Dreiecke in zwei besonderen Lagen. Collineationspunkt und -linie	30
15.	Der Specialfall dreier nicht in einer Graden liegenden Punkte. Der umschriebene Kreis des Dreiecks. Die Potenz und der Potenzinhalt des Punktes in Bezug auf den Kreis. Die barycentrischen Coordinaten des Punktes. Relation zwischen den Potenzen und der Entfernung zweier Punkte	31
17.	Die Gleichung des Kreises und der Kegelschnitte überhaupt. Die Potenz. Die Grade der gleichen Potenzen	35
18.	Die Summe der Quadrate der Seiten des Dreiecks. Merkwürdige Punkte, Grade und Kreise des Dreiecks: Die Eulersche Grade, der Schwerpunkt, der Höhenpunkt, der Kreis um den Höhenpunkt, der umschriebene und der Feuerbachsche Kreis und deren Centra, die Centra der ein- und angeschriebenen Kreise, der Punkt der kleinsten Quadratabstandssumme, die Centra der drei Malfattischen Kreise eines Dreiecks. Einander reciprok- und gleichförmig und isogonal entsprechende Punkte und Grade. Die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise. Die Potenz. Der Schwerpunkt und der Kreis der mittleren quadratischen Entfernungen	37
19.	Von der Reciprocität und Polarreciprocität. Der Kegelschnitt, der Pol und die Polare. Von der Collinearverwandtschaft. Die Coordinatentransformation. Zum Prinzip der Dualität	47
20.	Die Centrale der mittleren reciproken Entfernungen eines Punktes von materiellen Graden; die Schwerlinie	51
21.	Der Flächeninhalt des Dreiecks. Das reale und die idealen Dreiecke. Der Ptolemäische Satz als Specialfall eines allgemeineren	53

Drittes Kapitel.

Das Doppelverhältniss. Merkwürdige Punkte und Grade.

22.	Das Doppelverhältniss. Harmonische Punkte und Grade	57
23.	Harmonisch conjugirte Punkte	58
24.	Reelle und imaginäre Punkte und Grade	61
25.	Elliptische, parabolische, hyperbolische, cyclische Punkte. Harmo-	

Abschnitt Seite

nisch und anharmonisch conjugirte Punkte. Involution. Der goldene Schnitt 61

27. Diagonalpunkte. Involution. Der vierte harmonische Punkt. Ueber Punkte und Grade von besonderer Form 68

Zweiter Theil.

Erstes Kapitel.

Classification und Eigenschaften der Kegelschnitte. Die imaginären Kreispunkte.

1. Die Gleichung der Kegelschnitte in Punkt- und Liniencoordinaten. Die Degeneration der Kegelschnitte. Einander zugeordnete und zugehörige Gleichungen. Die Discriminante 73

3. Die auf einer Graden liegenden Punkte und durch einen Punkt gehenden Graden des Kegelschnitts. Eintheilung der Kegelschnitte. Der Kreis. Die imaginären Kreispunkte und -linien 77

4. Der Pol und die Polare. Polar und apolar conjugirte Punkte und Grade. Die Hauptpunkte und -linien, die harmonischen und anharmonischen Hauptpunkte und -linien. Der Ort der sich selbst polar und apolar conjugirten Punkte und Graden. Tripel von polar conjugirten Punkten und Graden. Das Diagonal- und sich selbst polar conjugirte Dreieck 81

5. Das Centrum und die Diametrallinien. Der Durchschnittspunkt zweier Graden und der innere Mittelpunkt einer Graden in Bezug auf zwei Punkte derselben 89

6. Die Polarcurve eines Kegelschnitts in Bezug auf einen Kegelschnitt 90

7. Die durch die zwei Kegelschnitten gemeinschaftlichen Punkte gehenden und die an ihren Graden liegenden Kegelschnitte. Die Gleichung der auf einer Graden liegenden Punkte und durch einen Punkt gehenden Graden des Kegelschnitts und deren Polaren und Pole. Die unendlich fernen Punkte des Kegelschnitts. Die harmonischen Hauptdiametrallinien; der innere Mittelpunkt einer Graden in Bezug auf die auf ihr liegenden Punkte derselben. Kreisgleichung in Liniencoordinaten 92

8. Abhängigkeit der Metrik von den imaginären Kreispunkten. Die Grundformeln der analytischen Geometrie und andere metrische Formeln. Die Polaren der imaginären Kreispunkte. Einander polar conjugirte Dreiecke, Collineationspunkt und -linie 95

11. Darstellung der in Bezug auf zwei durch zwei Gleichungen zweiten Grades gegebene Punkte oder Grade harmonisch conjugirten Punkte

Abschnitt Seite

oder Graden. Darstellung von sechs Punkten oder Graden in Involution durch drei Gleichungen, von denen zwei gegebene vier von ihnen darstellen. Darstellung der Gleichung jeder zwei Punkte einer Graden und jeder zwei Graden eines Punktes vermittelst der zwei Punkte derselben und ihren Mittelpunkt und resp. zwei Grade desselben und eine ihrer Winkelhalbirungslinien darstellenden Gleichungen. Relation zwischen den Coefficienten zweier je zwei in Bezug auf einander harmonisch conjugirte Punkte oder Grade darstellender Gleichungen 98

12. Die Theoreme von Carnot, Menelaus und Ceva und ähnliche Sätze 100

13. Die einer die durch die zwei Kegelschnitten gemeinschaftlichen Punkte gehenden oder an ihren gemeinsamen Graden liegenden Kegelschnitte darstellenden Gleichung zugehörige Gleichung. Die gemeinschaftlichen Punkte und Graden zweier Kegelschnitte. Der Ort der Graden, auf denen zwei Kegelschnitte vier harmonische Punkte, und der Punkte, durch welche sie vier harmonische Grade bestimmen. Involution 103

14. Der Ort eines Punktes, für den die durch ihn gehenden Graden des Kegelschnitts in Bezug auf seine Verbindungslinien mit zwei gegebenen Punkten harmonisch conjugirt sind. Der Ort des Durchschnittspunktes je zweier zu einander rechtwinkliger Graden des Kegelschnitts. Der hyperbolische Kreis. Der elliptische Kreis. Kreisgleichung in Punktcoordinaten 106

Zweites Kapitel.

Die elliptischen und hyperbolischen Brennpunkte. Das Prinzip der Continuität.

15. Die Brennpunkte und Hauptdiametrallinien. Zwei kubische Gleichungen zur Bestimmung der durch vier Punkte gehenden in Grade und der an vier Graden liegenden in Punkte degenerirenden Kegelschnitte. Die den Character der Kegelschnitte bezeichnenden Functionen 109

20. Die Gleichung jeder zwei vom Centrum gleich weit ab auf den Hauptdiametrallinien liegenden Punkte und deren Entfernung vom Centrum. Die elliptischen und hyperbolischen Brennpunkte. Das Prinzip der Continuität. Ein Specialfall des Carnotschen Satzes . 114

22. Die hyperbolischen Brennpunkte. Der an den durch sie gehenden Graden des Kegelschnitts liegende Kreis. Der Ort des Durchschnittspunktes je zweier zu einander rechtwinkliger Graden des Kegelschnitts. Die reellen Kreispunkte, die Winkelhalbirungsdiametrallinien in Bezug auf die Hauptdiametrallinien. Die auf der ersten Hauptdiametrallinie der Parabel liegenden Punkte und die durch sie gehenden zu ihr senkrechten Graden; ihre Formen; die Scheitelpunkte und deren Beziehung zu den Brennpunkten . . . 117

Abschnitt Seite

23. Die imaginären und reellen Kreispunkte. Die inneren und äusseren. Winkelhalbirungslinien eines Punktes in Bezug auf zwei Grade desselben 121
24. Die durch die Brennpunkte gehenden polar conjugirten Graden . 122
25. Die Winkelhalbirungslinien eines Punktes in Bezug auf zwei durch ihn gehende Grade der elliptischen Brennpunkte. Die Normallinien 123
26. Beziehung der Diametrallinien zu den elliptischen Brennpunkten. Die Leitlinien 124
27. Die elliptischen Kreise vom Centrum des Kegelschnitts. Die Scheitelpunkte und -kreise 124

Drittes Kapitel.

Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte.

28. Bezeichnungen von Coefficientenfunctionen. Die Excentricität und Characteristik des Kegelschnitts 126
29. Die senkrechten Abstände eines Punktes von den Hauptdiametrallinien. Relation zwischen denselben für einen Punkt des Kegelschnitts. Die Scheitelkreise 127
30. Der Durchschnittspunkt einer Hauptdiametrallinie mit einer zu ihr senkrechten Graden und deren Pol 128
31. Die senkrechten Abstände eines Punktes des Kegelschnitts von den Hauptdiametrallinien. Die von einer Diametrallinie und einer ihr polar conjugirten Graden des Kegelschnitts mit einer Hauptdiametrallinie gebildeten Winkel. Die Quadratsumme der halben Längen polar conjugirter Diametrallinien. Die polar conjugirten Diametrallinien der Kreise. Die harmonischen und anharmonischen Hauptdiametrallinien. Der an den durch die hyperbolischen Brennpunkte gehenden Graden des Kegelschnitts liegende Kreis. Die von polar conjugirten Diametrallinien mit einer Hauptdiametrallinie gebildeten Winkel. Parameter des Kegelschnitts. Die Normale. Die Subnormale eines Punktes der Parabel. Abstand des Centrums von den Leitlinien. Die Längen der Winkelhalbirungsdiametrallinien 128
32. Der senkrechte Abstand des Centrums von der Polare eines Punktes. Beziehung der Quadratabstände des Centrums von zwei polar conjugirten Graden des Kegelschnitts zu der Länge der Winkelhalbirungsdiametrallinien und des durch die auf diesen liegenden Punkte des Kegelschnitts gehenden Kreises zum Centrum und den anharmonischen Hauptdiametrallinien 133
33. Das Dreieck polar conjugirter Diametrallinien. Beziehung der Brennpunkte und der Graden des Kegelschnitts zu den Scheitelkreisen . 134
34. Die Entfernungen eines Punktes des Kegelschnitts von den elliptischen Brennpunkten. Die Normale eines Punktes der Parabel und seine Entfernung vom Brennpunkt. Metrische Beziehung zwischen Brennpunkt und Leitlinie. Relation zwischen den Entfer-

Abschnitt Seite

nungen eines Brennpunkts von einem Punkte des Kegelschnitts und dem auf ihrer Verbindungslinie liegenden Punkte seiner Leitlinie; bildliche Darstellung der Kegelschnitte. Die Entfernungen des Brennpunkts von den Kegelschnittspunkten seiner Graden. Der Radiusvector 134

35. Entfernung des Brennpunkts der Parabel von einem Punkte derselben und den auf der Hauptdiametrallinie liegenden Punkten seiner Normallinie und Graden der Parabel. Die senkrechten Abstände der Brennpunkte von einer Graden des Kegelschnitts; die Normale. Die Durchschnittspunkte einer Normallinie und Graden des Kegelschnitts mit einer Hauptdiametrallinie und die Brennpunkte . . . 139

36. Die Parallelabstände eines Punktes des Kegelschnitts von und in Bezug auf zwei polar conjugirte Diametrallinien und von einer Graden des Kegelschnitts und der ihr polar conjugirten Diametrallinie. Der Parameter der Diametrallinie; die Differenz der quadratischen halben Längen polar conjugirter Diametrallinien. Der Parameter der Diametrallinie der Parabel und der Brennpunkt 140

37. Gleichung gleich langer Diametrallinien. Abstände eines Punktes derselben von den Hauptdiametrallinien. Die Entfernung des Centrums von diesem Punkte und sein Abstand von dessen Polare; zu einander rechtwinklige Diametrallinien, die Quadratsumme ihrer reciproken halben Längen. Die harmonischen und anharmonischen Hauptdiametrallinien 142

38. Das Product der senkrechten Quadratabstände eines Punktes von jeden zwei gleich langen Diametrallinien. Kegelschnitte, für die das Product der senkrechten Quadratabstände ihrer Punkte von den harmonischen oder anharmonischen Hauptdiametrallinien constant ist 144

39. Die Parallelabstände eines Punktes des Kegelschnitts von den harmonischen Hauptdiametrallinien. Die Entfernungen der auf einer Graden des Kegelschnitts liegenden Punkte der harmonischen Hauptdiametrallinien vom Centrum; das durch sie bestimmte Dreieck. Die reciproken Parallelabstände eines Punktes des Kegelschnitts von den den harmonischen Hauptdiametrallinien parallelen Graden eines Scheitelpunktes; die Excentricitäten 146

Viertes Kapitel.

Von den Invarianten der Kegelschnitte und den einfachen Formen der Kegelschnittsgleichung. Das Doppelverhältniss. Ableitung und Verallgemeinerung von Sätzen durch die Prinzipien der Polarreciprocität, Dualität und Continuität.

40. Die Invarianten und Invariantenexponenten. Die Covarianten . 148

41. Die auf ein sich selbst polar conjugirtes Dreieck bezogene Kegel-

Abschnitt Seite

schnittsgleichung. Die Abstände des Centrums von den Seitenlinien, die Längen der Winkelhalbirungsdiametrallinien, der Radius des umschriebenen Kreises. Die Potenz des Centrums in Bezug auf diesen, der Ort der zu einander rechtwinkligen Graden des Kegelschnitts; der umschriebene Kreis und das Centrum des hyperbolischen Kreises. Die Centra der ein- und angeschriebenen Kreise eines in Bezug auf den hyperbolischen Kreis sich selbst polar conjugirten Dreiecks. Der Brennpunkt der Parabel und der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks; das Centrum des umschriebenen Kreises und die elliptische Leitlinie. Das durch zwei senkrechte Grade eines elliptischen Brennpunkts und dessen Leitlinie bestimmte sich selbst polar conjugirte Dreieck; die Abstände eines Punktes des Kegelschnitts von dessen Seitenlinien. Der Kreis um den Höhenpunkt oder der dem Dreieck polar conjugirte Kreis 151

42. Relation zwischen einem durch zwei Eckpunkte eines Dreiecks gehenden und einem an zwei Seitenlinien desselben liegenden Kegelschnitte und aus ihr resultirende Sätze 154

43. Der einem Dreieck umschriebene und ein- oder angeschriebene Kegelschnitt. Der Höhenpunkt des dem hyperbolischen Kreise eingeschriebenen Dreiecks; der Feuerbachsche Kreis und das Centrum des hyperbolischen Kreises. Der Radius des einem dem Kegelschnitt eingeschriebenen Dreieck umschriebenen Kreises und die Längen der den Seitenlinien parallelen Diametrallinien; der Radius des einem der Parabel eingeschriebenen Dreieck umschriebenen Kreises und die Parameter der durch die Durchschnittspunkte der den Eckpunkten zugehörigen Graden der Parabel gehenden Diametrallinien. Die Potenz des Centrums des Kegelschnitts in Bezug auf den einem ihm umschriebenen Dreieck polar conjugirten Kreis und der Radius des durch seine hyperbolischen Brennpunkte gehenden Kreises; das Centrum des hyperbolischen Kreises. Der Brennpunkt der Parabel und der einem ihr umschriebenen Dreieck umschriebene Kreis, der Höhenpunkt desselben und die Leitlinie. Der Radius des einem dem Kegelschnitt umschriebenen Dreieck umschriebenen Kreises, der Flächeninhalt des Dreiecks und der des durch die zu den Seitenlinien desselben gehörigen Punkte des Kegelschnitts bestimmten Dreiecks, die Längen und im Falle der Parabel die Parameter der durch sie gehenden Diametrallinien 156

44. Der Krümmungskreis, der Krümmungsradius 160

45. Die elliptischen und hyperbolischen Kreise und Parabeln, deren mit einem Kegelschnitte gemeinschaftliche Punkte auf der Polare eines Punktes liegen 161

46. Die auf das durch zwei Punkte oder Grade des Kegelschnitts und den Pol ihrer Verbindungslinie oder die Polare ihres Durchschnitts-

Abschnitt Seite

punktes bestimmte Dreieck bezogene Kegelschnittsgleichung. Die senkrechten Abstände eines Punktes des Kegelschnitts von zwei Graden desselben und der Polare ihres Durchschnittspunktes; die senkrechten Abstände zweier Punkte des Kegelschnitts und des Pols ihrer Verbindungslinie von einer Graden des Kegelschnitts. Der Radius des einem durch zwei Grade des Kegelschnitts und der Polare ihres Durchschnittspunktes gebildeten Dreieck umschriebenen Kreises, die Längen der jenen Graden parallelen Diametrallinien, der Abstand des Centrums von der Polare, der Inhalt des Dreiecks; der Radius des einem durch zwei Punkte der Parabel und den Pol ihrer Verbindungslinie bestimmten Dreieck umschriebenen Kreises, die Parameter der durch sie gehenden Diametrallinien, der zu der durch den Pol gehenden Diametrallinie gehörige Krümmungsradius, der Inhalt des Dreiecks. Die Entfernung der auf einer Graden der elliptischen Brennpunkte liegenden Punkte des Kegelschnitts und die Länge der ihr parallelen Diametrallinie; der Parameter einer Diametrallinie der Parabel und die Entfernung der auf der Polare ihres Durchschnittspunktes mit der Leitlinie liegenden Punkte der Parabel 166

47. Die Constanten der Kegelschnittsgleichung. Bestimmung des Kegelschnitts durch fünf Punkte. Der Ort des Durchschnittspunktes der entsprechenden Graden zweier Punkte und der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte zweier Graden. Das Doppelverhältniss von vier Punkten und Graden des Kegelschnitts. Der Pascalsche und Brianchonsche Satz. Constante Producte aus Entfernungen von Punkten harmonischer Hauptdiametrallinien. Die Durchschnittspunkte dreier Graden der Parabel mit einer vierten 171

48. Die Gleichungen zweier Kegelschnitte, bezogen auf das ihnen gemeinschaftliche sich selbst polar conjugirte Dreieck. Darstellung des Inhalts desselben und des Radius des umschriebenen Kreises durch Invarianten, der Invariantenexponent, der Ort der Punkte, durch welche die beiden Kegelschnitte vier harmonische Grade bestimmen. Die Jacobische Determinante dreier Kegelschnitte, der Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf drei Kegelschnitte durch einen Punkt gehen. Die auf dasselbe Dreieck bezogene Gleichung der Polarcurve eines Kegelschnitts. Die Polarcurve eines elliptischen Kreises in Bezug auf einen elliptischen Kreis. Die Polarcurve einer Parabel in Bezug auf einen hyperbolischen Kreis, dessen Centrum ein Punkt ihrer Leitlinie ist. Die Ableitung von Sätzen vermittelst des Prinzips der Polarreciprocität. Die Gleichungen zweier Kegelschnitte, bezogen auf ein durch drei ihrer gemeinschaftlichen Punkte oder Graden bestimmtes Dreieck. Eine Darstellung zweier in besonderer Beziehung zu einander stehender Kegelschnitte 175

Abschnitt Seite

49. Die Verallgemeinerung von Sätzen durch die Prinzipien der Dualität und Continuität. Die Eckpunkte und Seitenlinien zweier dem Kegelschnitt um- resp. eingeschriebener und in Bezug auf ihn sich selbst polar conjugirter Dreiecke 182

Schlussbemerkung.

50. Die Dualität. Der Ort der sich selbst apolar conjugirten Punkte und Graden 184

Verbesserungen.

S. 47, Z. 7, 8, 9 v. o. vertausche man A und $\mathcal{A}$ mit einander.
- 76, - 6 v. u. lese man „eine jede“ statt „mehr als eine“.
- 80, - 10 u. 17 v. o. setze man $\boldsymbol{\Theta}'$ für Θ'.
- 115, - 7 v. o. lese man $(\mathcal{A} + \boldsymbol{A})^2$ für $(\mathcal{A} - \boldsymbol{A})^2$.
- 119, - 8 - - setze man $\mathit{\Delta}^2$ u. $\lambda\mathit{\Delta}$ für $\mathcal{A}^2$ u. λ.
- 124, - 4 v. u. lese man $\mathcal{A} + \boldsymbol{A}$ statt $\mathcal{A} - \boldsymbol{A}$.
- 127, - 4 u. 5 v. u. setze man Δ^3 für Δ.
- 130, - 3 v. u. lese man „gleichen conjugirten“ statt „gleichen“.
- 136, - 14 v. u. streiche man die Worte von „In“ bis „Punkt.“.
- 139, - 10 v. o. lese man „vom rechtwinkligen Dreieck“ statt „des vorigen Abschnitts“.
- 156, - 8 u. 12 v. o. lese man „oder“ statt „und“.

Im 40. Abschnitte ist die Gleichung $\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = 0$ stillschweigend durch Weglassung eines Factors als von derselben Form, wie die Gleichung $\boldsymbol{\Sigma} = 0$ angenommen und daher die gegebene Erklärung des Invariantenexponenten des Kegelschnitts etwas zu modificiren. Besser ist es aber, dieselbe beizubehalten. Der constante Factor ν erweist sich alsdann in derselben Weise vermittelst der Gleichung $\Delta^3\mathbf{R} - \mathcal{A}S = 0$ als das Verhältniss $J^2 : \dot{J}^2$ und daraus 2 als Invariantenexponenten der Functionen $\mathcal{A}$, $\boldsymbol{A}$, $\mathit{\Delta}$, Δ^3, Θ, Θ', $\boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{\Theta}'$; der Invariantenexponent der Functionen $\mathbf{R}$, S, Σ ist 0 und ferner ist $\frac{4}{3}$ der Invariantenexponent (im weiteren Sinne) der Functionen $\boldsymbol{\Sigma}$, F', Φ' — man bemerke, dass die Gleichung $\boldsymbol{\Sigma} = 0$ in Bezug auf die Gleichungen der unendlich fernen Graden und der imaginären Kreislinien von der Form der Gleichung $\Phi' = 0$ ist — und 4, $\frac{10}{3}$, $\frac{8}{3}$ die Invariantenexponenten der Functionen Δ_1^3, $\mathit{\Delta}_1$, $\mathcal{A}_1$. Sonst wird dadurch weiter nichts geändert.

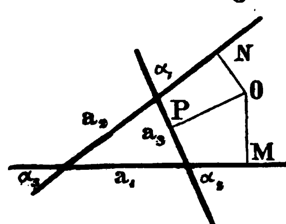
Erster Theil.

Erstes Kapitel.

Der Punkt und die Grade. Das Prinzip der Dualität.

---

1. Nimmt man in einer Ebene drei Punkte α_1, α_2, α_3 an, verbindet dieselben durch die Graden a_1, a_2, a_3 und zieht dann von irgend einem Punkte O derselben Ebene aus senkrecht auf diese Graden die Graden OM, ON, OP, so erfährt man offenbar aus der Lage des Punktes O die Längen der Graden OM, ON, OP, und würde umgekehrt aus den bekannten Längen dieser Graden die Lage des Punktes O bestimmen können. Wäre z. B. $OM = \mu_1$, $ON = \mu_2$, $OP = \mu_3$ gegeben, so brauchte man nur auf den Graden a_1, a_2, a_3 Senkrechte zu errichten, auf diesen vom Fusspunkte aus beziehungsweise Strecken von der Länge μ_1, μ_2, μ_3 abzutragen und durch die hierdurch bestimmten Punkte zu den Graden a_1, a_2, a_3 Parallele zu ziehen; diese würden sich alsdann in dem Punkte O schneiden. Doch hierbei waltet noch eine Unbestimmtheit ob; man kann nämlich auf den Senkrechten in je zwei Richtungen Strecken abtragen, und es ist fraglich, in welcher Richtung dies zu geschehen hat. Diese Unbestimmtheit zu beseitigen, setzen wir fest, dass die Längen der Graden OM, ON, OP als positiv betrachtet werden sollen, wenn der Punkt O innerhalb des von den Graden a_1, a_2, a_3 gebildeten Dreiecks liegt, und dass, wenn der Punkt O ausserhalb dieses Dreiecks liegt, die Graden OM, ON, OP beziehungsweise als positiv oder negativ anzusehen sind, je nachdem sie mit den Graden OM, ON, OP eines innerhalb des Dreiecks liegenden Punktes O gleichgerichtet sind, oder nicht, so dass also,



wenn μ_1, μ_2, μ_3 positive Grössen sind und der beliebige Punkt O die Lage des Punktes O in der Figur hat, $OM = \mu_1$, $ON = \mu_2$, $OP = -\mu_3$ zu setzen ist. Dann ist die Lage des Punktes O durch die Grössen OM, ON, OP und folglich auch, wenn s_1, s_2, s_3 die den Punkten α_1, α_2, α_3 gegenüberliegenden Dreiecksseiten bedeuten, durch die Grössen $\frac{s_1}{2}.OM$, $\frac{s_2}{2}.ON$, $\frac{s_3}{2}.OP$, welche, absolut genommen, die Flächeninhalte der durch den Punkt O mit den Punkten α_1, α_2, α_3 bestimmten Dreiecke angeben, vollkommen bestimmt und kann, wenn diese bekannt sind, stets angegeben werden. Diese Grössen nennen wir nun die Coordinaten des Punktes O und bezeichnen sie kurz durch α_1, α_2, α_3; der Punkt O, der die Coordinaten α_1, α_2, α_3 hat, selbst soll durch $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ bezeichnet und dieses Zeichen die Form des Punktes genannt werden.

Die Punkte α_1, α_2, α_3 nennen wir die Fundamentalpunkte, die Graden a_1, a_2, a_3 die Fundamentallinien und das durch sie bestimmte Dreieck das Fundamentaldreieck.

Nach den getroffenen Bestimmungen besteht zwischen den Coordinaten eines jeden Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und dem Flächeninhalte J des Fundamentaldreiecks die Relation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = J,$$

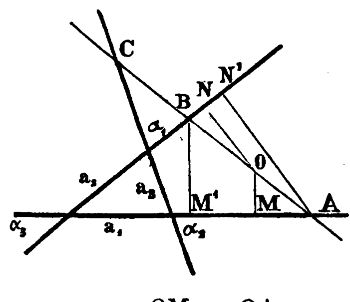
und diese lässt es als unnöthig erscheinen, unter den Coordinaten des Punktes die bezeichneten Flächeninhalte zu verstehen; wir stellen uns unter ihnen daher Grössen vor, die, mit einer Constanten c, welche natürlich auch Eins sein kann, multiplicirt, — selbstverständlich absolut genommen — diese Flächeninhalte angeben, indem nämlich die Constante c aus der Gleichung $c\alpha_1 + c\alpha_2 + c\alpha_3 = J$ bestimmt und somit die eigentlichen Coordinaten des Punktes in der Form

$$\frac{J\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \frac{J\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \frac{J\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

stets angegeben werden können. Durch Multiplication und Division der Coordinaten des Punktes mit einer Constanten wird dann im Wesentlichen keine Aenderung herbeigeführt.

2. Es möge eine Grade die Fundamentallinien in den Punkten A, B, C schneiden. Wir nehmen auf ihr einen beliebigen Punkt O oder $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ an und ziehen durch ihn

senkrecht zu den Graden a_1 und a_2 die Graden OM und ON, und ebenso die Graden BM′ und AN′ durch die Punkte B und A, die wir offenbar durch die Formen $(\alpha'_1, o, \alpha'_3)$ und $(o, \alpha''_2, \alpha''_3)$ darstellen können. Es ist dann, so lange die Punkte A und B nicht zusammenfallen oder die Grade durch den Punkt α_3 nicht hindurchgeht, stets



$$\frac{OM}{BM'} = \frac{OA}{BA}$$
$$\frac{ON}{AN'} = \frac{BO}{BA} = \frac{BA - OA}{BA} = 1 - \frac{OA}{BA}$$

und somit

$$\frac{OM}{BM'} + \frac{ON}{AN'} = 1.$$

Aus dieser Gleichung wird durch Multiplication der Zähler und Nenner der Brüche mit $\frac{s_1}{2}$ und $\frac{s_2}{2}$, wenn c, c′, c″ constante, durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} c\alpha_1 + c\alpha_2 + c\alpha_3 &= J \\ c'\alpha'_1 \qquad + c'\alpha'_3 &= J \\ c''\alpha''_2 + c''\alpha''_3 &= J \end{aligned}$$

bestimmte Grössen sind, die Gleichung

$$\frac{c\alpha_1}{c'\alpha'_1} + \frac{c\alpha_2}{c''\alpha''_2} = 1,$$

und wir erhalten nach Multiplication der linken Seite mit J und der rechten mit $c\alpha_1 + c\alpha_2 + c\alpha_3$ und nachheriger Fortschaffung der Nenner und des gemeinschaftlichen Factors c, indem wir dann die Glieder der Gleichung ordnen und, unter c_0 eine beliebige Constante verstehend,

$$c_0 c''\alpha''_2 (J - c'\alpha'_1) = a_1, \; c_0 c'\alpha'_1 (J - c''\alpha''_2) = a_2,$$
$$- c_0 c' c'' \alpha'_1 \alpha''_2 = a_3$$

setzen, schliesslich die Gleichung

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0.$$

Durch diese Gleichung, welcher die Coordinaten eines jeden auf der Graden liegenden Punktes genügen, oder durch die Grössen a_1, a_2, a_3 ist die Lage der Graden AB vollständig be-

stimmt, denn, setzt man jene Grössen als bekannt voraus, so findet man aus den drei vorhergehenden Gleichungen

$$c'\alpha'_1 = \frac{Ja_3}{a_3 - a_1},\ c''\alpha''_2 = \frac{Ja_3}{a_3 - a_2}$$

d. h. die Grösse der von den Punkten B und A mit den Punkten α_2, α_3 und α_3, α_1 bestimmten Dreiecke und damit die Lage der Punkte B und A und also auch die der Graden. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Grade nicht durch den Punkt α_3 geht, es ist aber klar, dass man, wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft, auf eine Gleichung von derselben Form kommt, wenn man die Punkte B und C in Betracht zieht, so dass also in jedem Falle die Lage einer Graden durch eine Gleichung von der Form

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0,$$

in der a_1, a_2, a_3 bestimmte, von der Lage der Graden abhängige Grössen und α_1, α_2, α_3 die Coordinaten eines beliebigen auf ihr liegenden Punktes bedeuten, durchaus bestimmt ist. Die Grössen a_1, a_2, a_3 nennen wir die Coordinaten der Graden und bezeichnen diese durch $|a_1, a_2, a_3|$ und dieses Zeichen als die Form der Graden. Durch Multiplication und Division der Coordinaten der Graden mit einer Constanten wird natürlich gleichfalls im Wesentlichen keine Aenderung herbeigeführt.

Für jeden Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ besteht die homogene Gleichung ersten Grades

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$$

und demgemäss auch für jede Grade $|a_1, a_2, a_3|$ des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ dieselbe Gleichung; wir nennen sie, wenn die Coordinaten der Graden als constant und die des Punktes als variabel anzusehen sind, die Gleichung der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ und im umgekehrten Falle die Gleichung des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Die Formen und Gleichungen der Fundamentalpunkte und -linien sind

$$(1, 0, 0),\ \alpha_1 = 0;\ (0, 1, 0),\ \alpha_2 = 0;\ (0, 0, 1),\ \alpha_3 = 0$$
$$|1, 0, 0|,\ a_1 = 0;\ |0, 1, 0|,\ a_2 = 0;\ |0, 0, 1|,\ a_3 = 0.$$

3. Aus dem eben begründeten trilinearen Coordinatensystem kann ein Coordinatensystem von der Art des sogenann-

ten Cartesischen hergeleitet werden. Wir schalten die folgenden Bemerkungen darüber hier ein.

Die senkrechten — mit den zugehörigen Vorzeichen behafteten — Abstände des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ von den Fundamentallinien sind durch die Ausdrücke

$$\frac{2J\alpha_1}{s_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)},\ \frac{2J\alpha_2}{s_2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)},\ \frac{2J\alpha_3}{s_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$$

gegeben; diesen kann wegen

$$2J = s_2 s_3 \sin A_1 = s_3 s_1 \sin A_2 = s_1 s_2 \sin A_3,$$

wo A_1, A_2, A_3 die den Fundamentallinien a_1, a_2, a_3 gegenüberliegenden Winkel des Fundamentaldreiecks sind, resp. auch die Form

$$\frac{s_2\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\,.\,\sin A_3,\ \frac{s_3\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\,.\,\sin A_2;\ \text{u. s. f.}$$

gegeben werden, und es besteht daher, wenn allgemein der — mit dem Vorzeichen des entsprechenden senkrechten Abstandes behaftete — Parallelabstand des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ von der Fundamentallinie a_n in Bezug auf die Fundamentallinie a_m durch ν_{nm} (für n, m ist 1, 2, 3 zu setzen) bezeichnet wird, die Gleichung

$$\nu_{nm} = \frac{s_m\alpha_n}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}.$$

Insbesondere ist

$$\nu_{12} = \frac{s_2\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3},\ \nu_{21} = \frac{s_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}.$$

Denkt man es nun bewirkt, dass die Constante, mit der die Coordinaten des Punktes multiplicirt werden müssen, damit

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = J$$

wird, der Einheit gleich ist, so erhellt, dass die Lage des Punktes auch durch die Grössen

$$\nu_{21} : s_1,\ \nu_{12} : s_2,$$

deren Bedeutung klar ist, bestimmt ist, und es können demnach die durch die Gleichungen

$$Jx = \alpha_2,\ Jy = \alpha_1$$

gegebenen, durch x, y bezeichneten Grössen als Coordinaten des Punktes aufgefasst werden. Die Grade stellt sich in diesem so bestimmten Coordinatensystem durch eine Gleichung dar, die

aus ihrer Gleichung in trilinearen Coordinaten vermittelst der letzten Gleichungen hervorgeht und, wenn

$$a_2 - a_3 = a,\ a_1 - a_3 = b,\ a_3 = c$$

gesetzt wird,

$$ax + by + c = 0$$

lautet.

Durch die specielle Annahme

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1$$

wird dieses Coordinatensystem zum schiefwinkligen, und durch die noch dazu tretende Bedingung

$$A_3 = \frac{\pi}{2}$$

zum rechtwinkligen Cartesischen Coordinatensystem.

4. Wenn a_1, a_2, a_3 die Coordinaten der Verbindungslinie der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ und $\varkappa$, $\varkappa'$ constante Grössen sind, so haben die Gleichungen

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0,\ a_1\alpha'_1 + a_2\alpha'_2 + a_3\alpha'_3 = 0$$
$$a_1(\varkappa\alpha_1 + \varkappa'\alpha'_1) + a_2(\varkappa\alpha_2 + \varkappa'\alpha'_2) + a_3(\varkappa\alpha_3 + \varkappa'\alpha'_3) = 0$$

statt. Daraus folgt:

Auf der Verbindungslinie der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ liegt der Punkt $(\varkappa\alpha_1 + \varkappa'\alpha'_1, \varkappa\alpha_2 + \varkappa'\alpha'_2, \varkappa\alpha_3 + \varkappa'\alpha'_3)$.

Die Verbindungslinie der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ ist die Grade $|\alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2, \alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3, \alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1|$. und in gleicher Weise:

Durch den Durchschnittspunkt der Graden $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_3|$ geht die Grade $|\varkappa a_1 + \varkappa' a'_1, \varkappa a_2 + \varkappa' a'_2, \varkappa a_3 + \varkappa' a'_3|$.

Der Durchschnittspunkt der Graden $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_3|$ ist der Punkt $(a_2 a'_3 - a_3 a'_2, a_3 a'_1 - a_1 a'_3, a_1 a'_2 - a_2 a'_1)$.

Auf Grund dieser Sätze werden wir für einen auf der Verbindungslinie der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ liegenden Punkt auch die kürzere Bezeichnung $(\varkappa, \varkappa')$ und in entsprechender Weise das Zeichen $|\varkappa, \varkappa'|$ gebrauchen und diesen Zeichen nöthigenfalls als Unterscheidungszeichen einen Strich beifügen.

5. Durch zwei Grade $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_3|$ werden zwei supplementäre Winkel bestimmt. Durch Drehung der ersten Graden in einer bestimmten Richtung um den Durchschnittspunkt bis zur Deckung mit der zweiten wird der eine Winkel

überstrichen — wir bezeichnen ihn als den von den Graden $|a_1, a_2, a_3|, |a'_1, a'_2, a'_3|$ gebildeten Winkel —, durch Drehung der zweiten in derselben Richtung um den Durchschnittspunkt bis zur Deckung mit der ersten der andere, er ist der von den Graden $|a'_1, a'_2, a'_3|, |a_1, a_2, a_3|$ gebildete Winkel. Hiernach ist klar, dass, wenn die Graden durch A, A' und der von ihnen gebildete Winkel durch AA' bezeichnet werden, die Gleichung

$$AA' + A'A = AA,$$

in der $AA = \pi$ zu nehmen ist, statt hat und dass für drei Grade eines Punktes A, A', B die Relation

$$AB + BA' = AA' + A'A'$$

besteht, in der $A'A' = o$ oder π zu setzen ist, je nachdem die Grade B bei der behufs Ueberführung in die Grade A' vorgenommenen Drehung der Graden A von dieser überstrichen wird, oder nicht; im ersten Falle kann sie daher auch in der Form

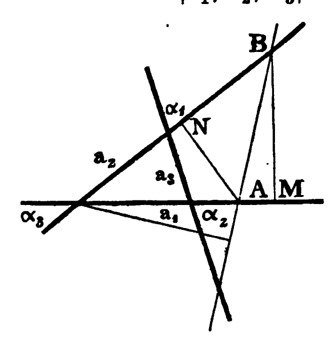
$$AB + BA' = AA',$$

im andern aber in der Form

$$AB - A'B = AA'$$

gegeben werden. Die Richtung, in der die Drehung vor sich zu gehen hat, setzen wir fest durch die Bestimmung, dass die Winkel des Fundamentaldreiecks A_1, A_2, A_3 als von den Fundamentallinien a_2, a_3; a_3, a_1; a_1, a_2 gebildet angesehen werden sollen.

6. Die Bestimmung des von zwei Graden gebildeten Winkels und der Entfernung zweier Punkte von einander durch die Coordinaten der Graden und Punkte ist die am nächsten liegende Aufgabe. Zu ihrer Lösung bedarf es der Bestimmung des Winkels, den die Senkrechte aus einem Fundamentalpunkte z. B. α_3 auf eine Grade $|a_1, a_2, a_3|$ mit einer durch ihn gehenden Fundamentallinie z. B. a_1 bildet, — er sei durch a bezeichnet — und der Grösse des Quadrats dieser Senkrechten — p — durch die Coordinaten der Graden. Die Durchschnittspunkte dieser Graden mit den Fundamentallinien a_1, a_2 mögen deshalb durch A, B — ihre Formen sind $(o, a_3 - a_2)$, $(- a_3, o, a_1)$ — und die von ihnen auf



jene Fundamentallinien gehenden Senkrechten durch AN und BM bezeichnet sein; es ist dann sets für jede Lage der Graden

$$\frac{\cos(a + A_3)}{\cos a} = \frac{p \sin A_3}{BM} \cdot \frac{AN}{p \sin A_3} = \frac{AN}{BM}$$

und demgemäss, weil

$$AN = \frac{2Ja_3}{s_2 (a_3 - a_2)}, \quad BM = \frac{2Ja_3}{s_1 (a_3 - a_1)}.$$

$$\cos(a + A_3) = \cos a \cos A_3 - \sin a \sin A_3$$

ist,

$$\operatorname{tg} a = \frac{s_2 \cos A_3 (a_3 - a_2) - s_1 (a_3 - a_1)}{s_2 \sin A_3 (a_3 - a_2)}.$$

Hieraus folgt weiter

$$\cos^2 a = \frac{s_2^2 \sin^2 A_3 (a_3 - a_2)^2}{s_1^2 a_1^2 + s_2^2 a_2^2 + s_3^2 a_3^2 - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 - 2 s_3 s_1 \cos A_2 a_3 a_1 - 2 s_1 s_2 \cos A_3 a_1 a_2}$$

oder, wenn

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= s_1^2 a_1 - s_1 s_2 \cos A_3 a_2 - s_3 s_1 \cos A_2 a_3 \\ \varepsilon_2 &= - s_1 s_2 \cos A_3 a_1 + s_2^2 a_2 - s_2 s_3 \cos A_1 a_3 \\ \varepsilon_3 &= - s_3 s_1 \cos A_2 a_1 - s_2 s_3 \cos A_1 a_2 + s_3^2 a_3 \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$\cos^2 a = \frac{s_2^2 \sin^2 A_3 (a_3 - a_2)^2}{a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3}$$

und damit, da $p^2 = \dfrac{\cos^2 a \cdot \overline{AN}^2}{\sin^2 A_3}$ ist,

$$p^2 = \frac{4 J^2 a_3^2}{a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3}.$$

7. Die Tangente des von den Graden $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_3|$ gebildeten Winkels ist gleich der Tangente des Winkels, den die aus irgend einem Punkte, also auch aus dem Fundamentalpunkte α_3 auf sie gefällten Senkrechten mit einander bilden, und es ist daher, wenn wir die von diesen und der Fundamentallinie a_1 gebildeten Winkel a, a' nennen,

$$\operatorname{tg} AA' = \operatorname{tg}(a - a') = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} a'}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a'}.$$

Hierin substituiren wir für tg a den im vorigen Abschnitt gefundenen und für tg a' den diesem entsprechenden Ausdruck; wir

erhalten dann nach einfachen Transformationen die Tangente des Winkels in der Form

$$\operatorname{tg} AA' = \frac{-2J(a_2a'_3 - a_3a'_2 + a_3a'_1 - a_1a'_3 + a_1a'_2 - a_2a'_1)}{\begin{array}{c} s_1^2a_1a'_1 + s_2^2a_2a'_2 + s_3^2a_3a'_3 - s_2s_3\cos A_1(a_2a'_3 + a_3a'_2) \\ - s_3s_1\cos A_2(a_3a'_1 + a_1a'_3) - s_1s_2\cos A_3(a_1a'_2 + a_2a'_1) \end{array}} \quad 1.$$

oder

$$\operatorname{tg} AA' = \frac{-2J(a_2a'_3 - a_3a'_2 + a_3a'_1 - a_1a'_3 + a_1a'_2 - a_2a'_1)}{a'_1\varepsilon_1 + a'_2\varepsilon_2 + a'_3\varepsilon_3}.$$

Nach dieser Formel ist zunächst der Winkel $AA' = o$ und also die Graden $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_3|$ parallel, wenn

$$a_2a'_3 - a_3a'_2 + a_3a'_1 - a_1a'_3 + a_1a'_2 - a_2a'_1 = o$$

ist, d. h. wenn ihr Durchschnittspunkt auf der Graden $|1, 1, 1|$ liegt.

Die Grade $|1, 1, 1|$ muss offenbar im Unendlichen liegen; sie wird die unendlich ferne Grade genannt. Die auf ihr liegenden Punkte heissen die unendlich fernen Punkte; sie haben die Eigenschaft, dass ihre Coordinatensumme Null ist.

Ferner ist der Winkel $AA' = \frac{\pi}{2}$ und demnach die Grade $|a'_1, a'_2, a'_3|$ senkrecht zur Graden $|a_1, a_2, a_3|$, wenn

$$s_1^2a_1a'_1 + s_2^2a_2a'_2 + s_3^2a_3a'_3 - s_2s_3\cos A_1(a_2a'_3 + a_3a'_2)$$
$$- s_3s_1\cos A_2(a_3a'_1 + a_1a'_3) - s_1s_2\cos A_3(a_1a'_2 + a_2a'_1) = o$$

oder

$$a'_1\varepsilon_1 + a'_2\varepsilon_2 + a'_3\varepsilon_3 = o$$

ist, d. h. wenn der offenbar unendlich ferne Punkt $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ auf der Graden $|a'_1, a'_2, a'_3|$ liegt. Wir nennen den Punkt $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, der darnach die Eigenschaft hat, dass jede durch ihn gehende Grade senkrecht ist zur Graden $|a_1, a_2, a_3|$, den Orthogonalpunkt dieser Graden.

Jede Grade, deren Coordinaten die Gleichung

$$s_1^2a_1^2 + s_2^2a_2^2 + s_3^2a_3^2 - 2s_2s_3\cos A_1a_2a_3 - 2s_3s_1\cos A_2a_3a_1$$
$$- 2s_1s_2\cos A_3a_1a_2 = o$$

erfüllen, steht auf sich selbst senkrecht. Eine solche Grade ist die unendlich ferne Grade.

Bezeichnen wir die Grade $|\varkappa, \varkappa'|$ durch B, so ist

$$\operatorname{tg} AB = \frac{-2J\varkappa'(a_2a'_3 - a_3a'_2 + a_3a'_1 - a_1a'_3 + a_1a'_2 - a_2a'_1)}{\begin{array}{c}\varkappa(s_1^2a_1^2 + \text{---} 2s_2s_3\cos A_1a_2a_3 \text{---}) + \varkappa'(s_1^2a_1a'_1 \\ + \text{---} s_2s_3\cos A_1(a_1a'_3 + a_3a'_2) \text{---})\end{array}}$$

und folglich

$$\varkappa' (s_1^2 a_1 a'_1 + --- s_2 s_3 \cos A_1 (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) ---) \operatorname{tg} AA' =$$
$$\{\varkappa (s_1^2 a_1^2 + --- 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 ---) + \varkappa' (s_1^2 a_1 a'_1 + -- - s_2 s_3 \cos A_1 (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) ---)\} \operatorname{tg} AB;$$

es besteht daher die Gleichung

$$\{\varkappa^2 (s_1^2 a_1^2 + --- 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 ---) + \varkappa\varkappa' (s_1^2 a_1 a'_1 + -- - s_2 s_3 \cos A_1 (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) ---)\} \operatorname{tg} AB$$
$$+ \{\varkappa'^2 (s_1^2 a'^2_1 + --- 2 s_2 s_3 \cos A_1 a'_2 a'_3 ---) + \varkappa'\varkappa (s_1^2 a_1 a'_1 + --- s_2 s_3 \cos A_1 (a'_2 a_3 + a'_3 a_2) ---)\} \operatorname{tg} A'B = o.$$

Die Annahme $AB = BA'$ oder also $\operatorname{tg} AB = - \operatorname{tg} A'B$ zeigt hieraus, dass die durch die Graden $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_3|$ bestimmten Winkel durch die Graden $|\varkappa, \varkappa'|$, $|\varkappa, -\varkappa'|$ halbirt werden, wenn $\varkappa$, $\varkappa'$ so angenommen werden, dass

$$\varkappa^2 = s_1^2 a'^2_1 + ---- 2 s_2 s_3 \cos A_1 a'_2 a'_3 ----$$
$$\varkappa'^2 = s_1^2 a_1^2 + ---- 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 ----$$

ist. Diese Winkelhalbirungslinien stehen auf einander senkrecht.

Wird ferner die Grade $|\lambda, \lambda'|$ durch C beseichnet, so ist

$$\operatorname{tg} BC = \frac{-2J(\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa')(a_2 a'_3 - a_3 a'_2 + a_3 a'_1 - a_1 a'_3 + a_1 a'_2 - a_2 a'_1)}{\varkappa\lambda (s_1^2 a_1^2 + --- 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 ---) + \varkappa'\lambda' (s_1^2 a'^2_1 + -- - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a'_2 a'_3 ---) + (\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa')(s_1^2 a_1 a'_1 + -- - s_2 s_3 \cos A_1 (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) ---)};$$

wir erkennen daraus, unter C' die Grade $|\mu, \mu'|$ verstehend, die Relation

$$(\varkappa\mu' - \mu\varkappa') \{\varkappa\lambda (s_1^2 a_1^2 + --- 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 ---) + \varkappa'\lambda' (s_1^2 a'^2_1 + --- 2 s_2 s_3 \cos A_1 a'_2 a'_3 ---) + (\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa') (s_1^2 a_1 a'_1 + --- s_2 s_3 \cos A_1 (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) ---)\} \operatorname{tg} BC$$
$$= (\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa') \{\varkappa\mu (s_1^2 a_1^2 + --- 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 ---) + \varkappa'\mu' (s_1^2 a'^2_1 + --- 2 s_2 s_3 \cos A_1 a'_2 a'_3 ---) + (\varkappa\mu' + \mu\varkappa') (s_1^2 a_1 a'_1 + --- s_2 s_3 \cos A_1 (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) ---)\} \operatorname{tg} BC'.$$

Ist insbesondere die Grade $|\varkappa, \varkappa'|$ eine der Winkelhalbirungslinien, so nimmt sie nach Division mit $\varkappa\varkappa' + s_1^2 a_1 a'_1 + --- - s_2 s_3 \cos A_1 (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) ----$ die Form

2. $(\varkappa\mu' - \mu\varkappa')(\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa') \operatorname{tg} BC = (\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa')(\varkappa\mu' + \mu\varkappa') \operatorname{tg} BC'$

an; für den besondern Fall CB = BC′ oder tg BC = — tg BC′, d. i. für den Fall, dass durch die Grade $|\varkappa, \varkappa'|$ zugleich auch der Winkel CC′ halbirt wird, wird aus ihr

$$\varkappa'^2 \lambda \mu = \varkappa^2 \lambda' \mu'. \qquad 3.$$

Endlich bemerken wir, dass vermittelst der leicht beweisbaren Relation

$$(s_1^2 a_1 a'_1 + \cdots - s_2 s_3 \cos A_1 (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) - \cdots)^2 + 4J^2 (a_2 a'_3 - a_3 a'_2 + a_3 a'_1 - a_1 a'_3 + a_1 a'_2 - a_2 a'_1)^2 = (s_1^2 a_1^2 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 - \cdots)(s_1^2 a'^2_1 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a'_2 a'_3 - \cdots)$$

aus dem für die Tangente gegebenen Ausdrucke sich sofort die Ausdrücke

$$\sin AA' = \frac{-2J(a_2 a'_3 - a_3 a'_2 + a_3 a'_1 - a_1 a'_3 + a_1 a'_2 - a_2 a'_1)}{\sqrt[2]{(s_1^2 a_1^2 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 - \cdots)(s_1^2 a'^2_1 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a'_2 a'_3 - \cdots)}} \qquad 4.$$

$$\cos AA' = \frac{s_1^2 a_1 a'_1 + \cdots - s_2 s_3 \cos A_1 (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) - \cdots}{\sqrt[2]{(s_1^2 a_1^2 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 - \cdots)(s_1^2 a'^2_1 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a'_2 a'_3 - \cdots)}}, \qquad 5.$$

in denen, weil der Sinus jedes von zwei Graden gebildeten Winkels positiv ist, das Vorzeichen der Quadratwurzel dem der Grösse $a_2 a'_3 - a_3 a'_2 + a_3 a'_1 - a_1 a'_3 + a_1 a'_2 - a_2 a'_1$ entgegengesetzt gleich ist, entnehmen lassen.

Weil hiernach

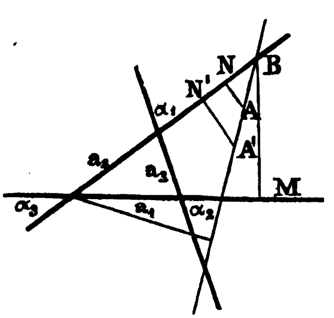
$$\sin AB = \frac{-2J\varkappa'(a_2 a'_3 - a_3 a'_2 + a_3 a'_1 - a_1 a'_3 + a_1 a'_2 - a_2 a'_1)}{\sqrt[2]{(s_1^2 a_1^2 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 - \cdots)(s_1^2 (\varkappa a_1 + \varkappa' a'_1)^2 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 (\varkappa a_2 + \varkappa' a'_2)(\varkappa a_3 + \varkappa' a'_3) - \cdots)}}$$

ist, so hat die Gleichung

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} = -\frac{\sqrt[2]{s_1^2 a_1^2 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 - \cdots}}{\sqrt{s_1^2 a'^2_1 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a'_2 a'_3 - \cdots}} \cdot \frac{\sin AB}{\sin A'B} \qquad 6.$$

— das Vorzeichen der zweideutigen Quadratwurzel ist dem der Grösse $\frac{\varkappa'}{\varkappa}$ entgegengesetzt gleich — statt. Das Verhältniss der in der Form der Graden $|\varkappa, \varkappa'|$ auftretenden Grössen $\varkappa : \varkappa'$ ist somit umgekehrt proportional dem Sinusverhältniss der Winkel, die die Graden $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_3|$ mit ihr bilden.

8. Zum Zweck der Bestimmung der Entfernung zweier Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ — wir bezeichnen sie durch A, A′ — von einander heisse der Durchschnittspunkt ihrer Verbindungslinie $|\alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2,\ \alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3,\ \alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1|$ mit der Fundamentallinie a_2 B und die Senkrechte von ihm auf die Fundamentallinie a_1 BM, und ferner sei p die Senkrechte aus dem Fundamentalpunkte α_3 auf jene Verbindungslinie und AN, A′N′ die Senkrechten von den Punkten A, A′ auf die Fundamentallinie a_2. Es ist dann



$$p : \alpha_3 B = A'N' - AN : AA'$$
$$\alpha_3 B . \sin A_3 = BM$$

und folglich, da

$$BM = \frac{2J(\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1)}{s_1(\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1 - \alpha_2\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_2)}$$

und

$$AN = \frac{2J\alpha_2}{s_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)},\quad A'N' = \frac{2J\alpha'_2}{s_2(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)},$$

also

$$A'N' - AN = \frac{2J(\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1 - \alpha_2\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_2)}{s_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)}$$

ist,

$$p . (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)\, AA' = 2J(\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1);$$

erheben wir daher diese Gleichung ins Quadrat und substituiren dann für p^2 den Werth, den es nach der Formel am Ende des 6. Abschnitts hat, so erhalten wir die Entfernung der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ durch die Gleichung

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)^2\, \overline{AA'}^2 &= s_1^2(\alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2)^2 \\ &+ s_2^2(\alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3)^2 + s_3^2(\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1)^2 \\ &- 2s_2s_3\cos A_1(\alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3)(\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1) \\ &- 2s_3s_1\cos A_2(\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1)(\alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2) \\ &- 2s_1s_2\cos A_3(\alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2)(\alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3).\end{aligned} \quad (7.)$$

Die Entfernung zweier Punkte hat hiernach ein doppeltes Vorzeichen. Wenn die Entfernung AA′ von A nach A′ gemessen als positiv angesehen wird, so muss die von A′ nach A gemes-

sene Entfernung A'A als negativ gelten. Diese Unterscheidung, nach der die Gleichung

$$AA' + A'A = o$$

statt hat, hat indessen, so lange nur die Entfernung zweier Punkte in Betracht kommt, keinen Zweck, unabweislich ist sie aber dann, wenn zu den zwei Punkten noch ein dritter Punkt $(\varkappa, \varkappa')$ oder B hinzutritt. Es ist dann stets

$$AB + BA' = AA' \text{ oder } AB + BA' + A'A = o,$$

mag der Punkt B zwischen den Punkten A, A' liegen, oder nicht.

Wir bemerken, dass das Quadrat der Entfernung jeder zwei Punkte, die mit den Punkten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ auf einer Graden liegen, abgesehen von den Quadraten ihrer Coordinatensummen bis auf einen Factor den rechtsstehenden Ausdruck der obigen Gleichung enthält; er kann deshalb füglich als die Entfernungsconstante der Graden $|\alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2, \alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3, \alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1|$ bezeichnet werden.

Für die Punkte A, B geht die Entfernungsconstante den Factor $\varkappa'^2$ ein; es erhellt daraus die Gleichung

$$\varkappa'^2 (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)^2 \overline{AA'}^2 = (\varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3))^2 \overline{AB}^2$$

und, da ebenso

$$\varkappa^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 \overline{A'A}^2 = (\varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3) + \varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3))^2 \overline{A'B}^2$$

ist, so kommt man durch Subtraction und nachherige Division mit AA' und $\varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)$ auf die Gleichung

$$(\varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3) - \varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3))\, AA' = (\varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3))\,(AB + A'B).$$

Und diese Gleichung zeigt in Verbindung mit den vorigen, dass

$$\varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)\, AA' = (\varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3))\, AB \quad 8.$$

$$\varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\, A'A = (\varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3) + \varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3))\, A'B$$

ist, denn, da von diesen Gleichungen die eine die andere nach sich zieht, so wären nur noch die Gleichungen

$$\varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)\, AA' = (\varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3))\, BA$$

$$\varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\, A'A = (\varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3) + \varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3))\, BA'$$

möglich, diese aber führen auf die unmöglichen Relationen $AA' = o$, $AB + A'B = o$.

Aus den gefundenen Gleichungen ergiebt sich die Relation

9. $\varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,AB + \varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)\,A'B = o$;

sie lehrt, dass der Punkt $(\varkappa, \varkappa')$ zwischen den Punkten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ liegt oder nicht liegt, je nachdem $\varkappa(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ und $\varkappa'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, und ferner dass er auf ihrer Verbindungslinie so gelegen ist, dass

$$\lambda' AB = \lambda BA'$$

ist, wenn

$$\varkappa\lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \varkappa'\lambda'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)$$

ist, und zwar innen, d. h. zwischen A und A', oder aussen, d. h. nicht zwischen A und A', je nachdem λ und λ' gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Insbesondere ist $AB = BA'$, also der Punkt $(\varkappa, \varkappa')$ **der (innere) Mittelpunkt** der Verbindungslinie der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ in Bezug auf diese Punkte, wenn

$$\varkappa = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3\,,\quad \varkappa' = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

ist. Der Punkt $(\varkappa, -\varkappa')$ ist für dieselben Werthe von $\varkappa$, $\varkappa'$ der unendlich ferne Punkt dieser Verbindungslinie, wir nennen ihn auch, da für ihn die Relation $AB = A'B$ gilt, **den äusseren Mittelpunkt** der Graden in Bezug auf jene Punkte. Es mag übrigens bemerkt werden, dass für den unendlich fernen Punkt die Relationen $AB + BA' = o$, $AB + BA' = AA'$ zugleich bestehen, und dass Aehnliches gilt, wenn drei Grade durch die Relation $AB = A'B$, deren Bedeutung im zweiten Theile dieser Schrift klar wird, mit einander verknüpft sind.

Aus der obigen Gleichung folgt weiter

10. $$\frac{\varkappa'}{\varkappa} = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3} \cdot \frac{AB}{A'B};$$

das Verhältniss der in der Form des Punktes $(\varkappa, \varkappa')$ auftretenden Grössen $\varkappa : \varkappa'$ ist darnach umgekehrt proportional dem Verhältniss der Entfernungen der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ von ihm.

Endlich erwähnen wir, dass der Punkt $(\varkappa, \varkappa')$ in Bezug auf die Punkte (λ, λ'), (μ, μ') — sie seien durch C, C' bezeichnet — durch $(\varkappa\mu' - \mu\varkappa', \lambda\varkappa' - \varkappa\lambda')$ dargestellt werden kann und dass daher nach derselben Gleichung

$$(\varkappa\mu' - \mu\varkappa')(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \lambda'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3))\,BC = (\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa')(\mu(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \mu'(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3))\,BC'$$

ist. Ist insbesondere der Punkt $(\varkappa, \varkappa')$ in Bezug auf die Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ der innere Mittelpunkt, so nimmt sie die Form

$$(\varkappa\mu' - \mu\varkappa')(\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa')\,BC = (\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa')(\varkappa\mu' + \mu\varkappa')\,BC' \qquad 11.$$

an; für den besonderen Fall $CB = BC'$ d. h. wenn der Punkt $(\varkappa, \varkappa')$ zugleich auch in Bezug auf die Punkte (λ, λ'), (μ, μ') der innere Mittelpunkt ist, wird aus ihr

$$\varkappa'^2\lambda\mu = \varkappa^2\lambda'\mu'. \qquad 12.$$

Die in diesem und dem vorhergehenden Abschnitte entwickelten zwei Grundformeln der analytischen Geometrie ändern sich übrigens durch eine cyclische Vertauschung der Indices nicht; es muss daher jedes Bedenken, das man wegen der bei ihrer Herleitung stillschweigend gemachten Voraussetzung, die aus dem Fundamentalpunkte α_3 gezogenen Senkrechten seien nicht Null, gegen die Allgemeingültigkeit derselben haben könnte, offenbar schwinden.

9. Die inneren Mittelpunkte der Fundamentallinien in Bezug auf die Fundamentalpunkte sind durch die Formen (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0) dargestellt; aus denselben sieht man sofort, dass die Verbindungslinien dieser Mittelpunkte mit den gegenüberliegenden Fundamentalpunkten durch einen Punkt gehen, dessen Form (1, 1, 1) ist. Dieser Punkt ist, wie aus der Bedeutung der Coordinaten hervorgeht, der Schwerpunkt des Fundamentaldreiecks, wenn dieses als homogen vorausgesetzt wird. Er ist von jedem Fundamentalpunkte zweimal so weit entfernt, als von dem jedesmaligen ihm gegenüberliegenden Mittelpunkte.

Wir nennen den Punkt (1, 1, 1), der dieselben Coordinaten hat, wie die unendlich ferne Grade |1, 1, 1|, vorzugsweise den endlich fernen Punkt und die durch ihn gehenden Graden die endlich fernen Graden; diese haben die Eigenschaft, dass ihre Coordinatensumme Null ist.

Durch die Conformität der Formen des endlich fernen Punktes und der unendlich fernen Graden werden wir hingewiesen auf die Begriffe des Winkels zweier Punkte und der Entfernung zweier Graden von einander.

10. Wenn der Durchschnittspunkt zweier Graden auf der

unendlich fernen Graden liegt oder also ihre unendlich fernen Punkte in einen einzigen zusammenfallen, so sind die beiden Graden parallel, und es bilden daher zwei Grade einen Winkel, der gleich Null oder von Null verschieden ist, je nachdem ihre unendlich fernen Punkte zusammenfallen, oder nicht. Das führt auf die Definition des Winkels zweier Punkte: Der von zwei Punkten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ gebildete Winkel ist der von ihren endlich fernen Graden $|\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2|$, $|\alpha'_2 - \alpha'_3, \alpha'_3 - \alpha'_1, \alpha'_1 - \alpha'_2|$ gebildete Winkel. Bezeichnen wir ihn durch AA′, so erhalten wir demnach seine Tangente, wenn wir in der Formel 1. a_1 mit $\alpha_2 - \alpha_3$, a'_1 mit $\alpha'_2 - \alpha'_3$, u. s. f. vertauschen; sie ist, wenn

$$
13.\quad
\begin{aligned}
3\sigma_1^2 &= s_2^2 + s_3^2 + 2s_2s_3 \cos A_1\\
3\sigma_2^2 &= s_3^2 + s_1^2 + 2s_3s_1 \cos A_2\\
3\sigma_3^2 &= s_1^2 + s_2^2 + 2s_1s_2 \cos A_3\\
3\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1 &= s_1^2 - s_2s_3 \cos A_1 + s_3s_1 \cos A_2\\
&\qquad + s_1s_2 \cos A_3\\
3\sigma_3\sigma_1 \cos \mathcal{A}_2 &= s_2^2 - s_3s_1 \cos A_2 + s_1s_2 \cos A_3\\
&\qquad + s_2s_3 \cos A_1\\
3\sigma_1\sigma_2 \cos \mathcal{A}_3 &= s_3^2 - s_1s_2 \cos A_3 + s_2s_3 \cos A_1\\
&\qquad + s_3s_1 \cos A_2
\end{aligned}
$$

gesetzt wird,

$$
\operatorname{tg} AA' = \frac{-2J(\alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2 + \alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3 + \alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1)}{\begin{array}{c}\sigma_1^2\alpha_1\alpha'_1 + \sigma_2^2\alpha_2\alpha'_2 + \sigma_3^2\alpha_3\alpha'_3 - \sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1 (\alpha_2\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_2)\\ - \sigma_3\sigma_1 \cos \mathcal{A}_2 (\alpha_3\alpha'_1 + \alpha_1\alpha'_3) - \sigma_1\sigma_2 \cos \mathcal{A}_3 (\alpha_1\alpha'_2 + \alpha_2\alpha'_1)\end{array}}.
$$

Die Bemerkung, dass das dreifache Quadrat der Entfernung des Durchschnittspunktes der Graden $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_3|$ vom endlich fernen Punkte

$$
\frac{\sigma_1^2 (a_2a'_3 - a_3a'_2)^2 + \cdots - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1 (a_3a'_1 - a_1a'_3)(a_1a'_2 - a_2a'_1) - \cdots}{(a_2a'_3 - a_3a'_2 + a_3a'_1 - a_1a'_3 + a_1a'_2 - a_2a'_1)^2}
$$

ist, lässt ferner die Bedeutung der Entfernung zweier Graden — obschon nicht ganz vollständig — erkennen: Das Quadrat der Entfernung der Graden $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_3|$ ist gleich dem dreifachen Quadrate der Entfernung ihres Durchschnittspunktes $(a_2a'_3 - a_3a'_2, a_3a'_1 - a_1a'_3, a_1a'_2 - a_2a'_1)$ vom endlich fernen Punkte, multiplicirt mit dem Quadrate des Quotienten

$$
\frac{a_2a'_3 - a_3a'_2 + a_3a'_1 - a_1a'_3 + a_1a'_2 - a_2a'_1}{(a_1 + a_2 + a_3)(a'_1 + a'_2 + a'_3)}.
$$

Sie ist, wenn sie durch AA′ bezeichnet wird, zufolge der Formel 7. durch die Gleichung

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3)^2 (a'_1 + a'_2 + a'_3)^2 \overline{AA'}^2 = \sigma_1^2 (a_2a'_3 - a_3a'_2)^2 \\ + \sigma_2^2 (a_3a'_1 - a_1a'_3)^2 + \sigma_3^2 (a_1a'_2 - a_2a'_1)^2 \\ - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1 (a_3a'_1 - a_1a'_3)(a_1a'_2 - a_2a'_1) \\ - 2\sigma_3\sigma_1 \cos \mathcal{A}_2 (a_1a'_2 - a_2a'_1)(a_2a'_3 - a_3a'_2) \\ - 2\sigma_1\sigma_2 \cos \mathcal{A}_3 (a_2a'_3 - a_3a'_2)(a_3a'_1 - a_1a'_3)\end{aligned}$$

gegeben. Die Verschiedenheit in der Grösse der Entfernungen der Graden eines Punktes von einander bedingt offenbar nur der Quotient; seine Beschaffenheit zeigt, dass die absolute Entfernung zweier Graden gleich ist der Summe oder Differenz der absoluten Entfernungen dieser Graden von jeder dritten, durch ihren Durchschnittspunkt gehenden Graden. Ferner ist zu bemerken, dass, wenn die Entfernung AA′ als positiv angesehen wird, wenn die Grade A durch eine in einem bestimmten Sinne vorgenommene Drehung um den Durchschnittspunkt in die Grade A′ übergeführt gedacht wird, die Entfernung A′A als negativ gelten muss, wenn die Grade A′ durch eine im entgegengesetzten Sinne vorgenommene Drehung in die Grade A übergeführt gedacht wird. Diese Unterscheidung entspricht vollständig der für Entfernungen von Punkten gemachten; doch muss nothwendig noch festgesetzt werden, dass beim Ueberführen einer Graden in eine andere durch Drehung derselben um den Durchschnittspunkt die durch diesen gehende endlich ferne Grade nicht überstrichen werden darf, entsprechend dem Umstande, dass die Messung der Entfernung zweier Punkte nicht über den unendlich fernen Punkt ihrer Verbindungslinie ausgeführt wird.

Selbstverständlich können an die gegebenen zwei Formeln dieselben Entwickelungen geknüpft werden, wie an die Formeln 1. und 7., und es gelten demnach die im 7. und 8. Abschnitte entwickelten Formeln und Sätze sämmtlich in der entsprechenden Umformung. Wir heben von diesen, indem wir bemerken, dass eine Grade zwischen den Graden A, A′ liegt, oder nicht liegt, je nachdem sie bei der behufs Ueberführung in die Grade A′ vorgenommenen Drehung der Graden A von dieser überstrichen wird, oder nicht, hier nur den folgenden Satz namentlich hervor: Die Grade $|\varkappa, \varkappa'|$ liegt zwischen den Graden $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_3|$, oder nicht, je nachdem $\varkappa (a_1 + a_2$

$+ a_3$) und $\varkappa'$ ($a'_1 + a'_2 + a'_3$) gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Nach ihm liegt die der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ parallele Grade $|\varkappa, \varkappa'|$ und so auch jeder Punkt derselben mit der ihr parallelen endlich fernen Graden oder also mit dem endlich fernen Punkte auf derselben oder nicht auf derselben Seite von der Graden $|a_1, a_2, a_3|$, je nachdem $\varkappa(a_1 + a_2 + a_3)$ und $\varkappa'$ entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben.

Die sechs Gleichungen 13. bleiben, wie aus ihnen sofort sich ergiebt, auch bestehen, wenn die Grössen σ_1, σ_2, σ_3, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ mit den Grössen s_1, s_2, s_3, A_1, A_2, A_3, und umgekehrt, vertauscht werden, so dass demnach diese durch jene in ganz derselben Weise darstellbar sind, wie jene durch diese. Das weist, wie die Formeln selbst, in denen sie erscheinen, auf die einander entsprechende Bedeutung dieser Grössen in der Geometrie. Die Grössen σ_1, σ_2, σ_3 sind analog die Entfernungen der Fundamentallinien a_2, a_3; a_3, a_1; a_1, a_2 von einander — ihre Quadrate sind die dreifachen Quadrate der Entfernungen der Fundamentalpunkte α_1, α_2, α_3 vom endlich fernen Punkte — und die Grössen $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ die von den Fundamentalpunkten α_2, α_3; α_3, α_1; α_1, α_2 — oder deren endlich fernen Graden — gebildeten Winkel.

Natürlich stehen die Grössen σ und $\mathcal{A}$ in denselben Beziehungen zu einander und zum Fundamentaldreieck, wie die Grössen s und A; sie können aus jenen sechs Gleichungen leicht hergeleitet werden; wir geben hier als Beispiel die Formeln

$$-16J^2 = s_1^4 + s_2^4 + s_3^4 - 2s_2^2 s_3^2 - 2s_3^2 s_1^2 - 2s_1^2 s_2^2$$
$$-16J^2 = \sigma_1^4 + \sigma_2^4 + \sigma_3^4 - 2\sigma_2^2\sigma_3^2 - 2\sigma_3^2\sigma_1^2 - 2\sigma_1^2\sigma_2^2$$

und setzen dazu die Relation

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2.$$

11. Jede durch den Punkt (ε_1, ε_2, ε_3) gehende Grade ist eine zur Graden $|a_1, a_2, a_3|$ senkrechte Grade. Es ist daher die durch einen Punkt (α_1, α_2, α_3) gehende, zur Graden $|a_1, a_2, a_3|$ senkrechte Grade durch die Form

$$|\alpha_2\varepsilon_3 - \alpha_3\varepsilon_2, \alpha_3\varepsilon_1 - \alpha_1\varepsilon_3, \alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_2\varepsilon_1|$$

gegeben; ihr Durchschnittspunkt mit der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ ist der Punkt

$$(a_2(\alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_2\varepsilon_1) - a_3(\alpha_3\varepsilon_1 - \alpha_1\varepsilon_3), a_3(\alpha_2\varepsilon_3 - \alpha_3\varepsilon_2)$$
$$- a_1(\alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_2\varepsilon_1), a_1(\alpha_3\varepsilon_1 - \alpha_1\varepsilon_3) - a_2(\alpha_2\varepsilon_3 - \alpha_3\varepsilon_2))$$

oder, besser geschrieben, der Punkt

$$(\alpha_1 (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3) - \varepsilon_1 (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3),$$
$$\alpha_2 (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3) - \varepsilon_2 (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3),$$
$$\alpha_3 (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3) - \varepsilon_3 (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3)).$$

Die Entfernung dieses Punktes von dem Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ d. i. der senkrechte Abstand des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ von der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ — wir bezeichnen ihn durch μ — ist, da die Coordinatensumme dieser Punkte

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3), \ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

ist, ferner da die Entfernungsconstante ihrer Verbindungslinie, weil diese wegen $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ u. a. in der Form

$$|\alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \ \alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_2\varepsilon_1 + \varepsilon_1 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \ \alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_2\varepsilon_1|$$

darstellbar ist, sofort als durch die Grösse

$$(s_1^2\varepsilon_2^2 + s_2^2\varepsilon_1^2 + 2s_1s_2 \cos A_3\varepsilon_1\varepsilon_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2$$

gegeben erkannt wird und, wie durch eine kleine Rechnung ermittelt wird,

$$s_1^2\varepsilon_2^2 + s_2^2\varepsilon_1^2 + 2s_1s_2 \cos A_3\varepsilon_1\varepsilon_2 = -(s_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3 + s_2^2\varepsilon_3\varepsilon_1 + s_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2)$$
$$= 4J^2 (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3)$$

ist, endlich da diese Entfernungsconstante in dem gegenwärtigen Falle den Factor $(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3)^2$ eingeht, durch die Gleichung

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3)\mu^2$$
$$= 4J^2 (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3)^2$$

gegeben. Es ist daher der senkrechte Abstand des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ von der Graden $|a_1, a_2, a_3|$

$$\mu = \frac{2J(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\sqrt[2]{a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3}}, \quad 14.$$

und zwar ist er, da unter der Bedingung

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} = -\frac{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ein Punkt der zur Graden $|a_1, a_2, a_3|$ parallelen Graden $|\varkappa, \varkappa'|$ ist, zufolge einer Bemerkung im vorigen Abschnitt, wenn das Vorzeichen der Quadratwurzel mit dem Vorzeichen der Grösse $a_1 + a_2 + a_3$ übereinstimmend angenommen wird, welche Annahme keine Widersprüche herbeiführt, positiv oder negativ, je nachdem der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

mit dem endlich fernen Punkte auf derselben oder nicht auf derselben Seite von der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ liegt.

Der Parallelabstand des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ von der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ in Bezug auf die Grade $|a'_1, a'_2, a'_3|$ — wir nennen ihn ν — ist hiernach zufolge der Formel 4.

$$15.\quad \nu = \frac{(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3)\sqrt[2]{a'_1\varepsilon'_1 + a'_2\varepsilon_2 + a'_3\varepsilon'_3}}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(a_2a'_3 - a_3a'_2 + a_3a'_1 - a_1a'_3 + a_1a'_2 - a_2a'_1)};$$

er ist, wenn das Vorzeichen der Quadratwurzel mit dem der Grösse $(a_1 + a_2 + a_3)(a_2a'_3 - a_3a'_2 + a_3a'_1 - a_1a'_3 + a_1a'_2 - a_2a'_1)$ übereinstimmend angenommen wird, positiv oder negativ, je nachdem es der senkrechte Abstand ist.

In der entsprechenden Umformung geben diese beiden Formeln den senkrechten und den Parallelabstand der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ von dem Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ in Bezug auf den Punkt $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$, d. i. die Entfernung der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ von der Verbindungslinie des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und des zu ihm senkrechten resp. dem Punkte $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ parallelen, auf jener Graden liegenden Punktes.

Leicht ist an dieser Stelle der Beweis der folgenden zwei Sätze: Die durch die Fundamentalpunkte gehenden, zu den entsprechenden Fundamentallinien senkrechten Graden gehen durch den Punkt $(\cot A_2 \cot A_3, \cot A_3 \cot A_1, \cot A_1 \cot A_2)$. Die auf den Fundamentallinien liegenden, zu den entsprechenden Fundamentalpunkten senkrechten Punkte liegen auf der Graden $|\cot \mathcal{A}_2 \cot \mathcal{A}_3, \cot \mathcal{A}_3 \cot \mathcal{A}_1, \cot \mathcal{A}_1 \cot \mathcal{A}_2|$.

12. Wenn μ_1, μ_2, μ_3 und $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3$ die mit den zugehörigen Vorzeichen behafteten — dieser Zusatz wird weiterhin überall wegbleiben — senkrechten Abstände des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ von den Fundamentallinien und der Fundamentalpunkte von der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ sind, so ist nach Formel 14.

$$\frac{J\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{s_1}{2} \cdot \mu_1, \quad \frac{J\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{s_2}{2} \cdot \mu_2,$$

$$\frac{J\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{s_3}{2} \cdot \mu_3;$$

$$\frac{Ja_1}{\sqrt[2]{s_1^2a_1^2 + --- - 2s_2s_3 \cos A_1 a_2a_3 ---}} = \tfrac{1}{2} \cdot \bar{\mu}_1,$$

$$\frac{Ja_2}{\sqrt[2]{s_1^2 a_1^2 + --- 2 s_2 s_3 \cos A_3 a_2 a_3 ---}} = \tfrac{1}{2} \cdot \bar{\mu}_2,$$

$$\frac{Ja_3}{\sqrt[2]{s_1^2 a_1^2 + --- 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 ---}} = \tfrac{1}{2} \cdot \bar{\mu}_3$$

— das Vorzeichen der Quadratwurzel ist das der Grösse $a_1 + a_2 + a_3$ —, und es ergeben sich daraus mit Rücksicht zugleich auf die entsprechenden Ausdrücke die Sätze:

Die Coordinaten des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sind, multiplicirt mit dem constanten Factor $\frac{J}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$, gleich den senkrechten Abständen des Punktes von den Fundamentallinien, multiplicirt mit $\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}, \frac{s_3}{3}$, und die Coordinaten der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ sind, multiplicirt mit dem constanten Factor $\frac{J}{a_1 + a_2 + a_3}$, gleich den senkrechten Abständen der Graden von den Fundamentalpunkten, multiplicirt mit $\frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_2}{2}, \frac{\sigma_3}{2}$.

Die Coordinaten der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ sind, multiplicirt mit dem constanten Factor $\frac{J}{\sqrt[2]{s_1^2 a_1^2 + --- 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 ---}}$, gleich den senkrechten Abständen der Fundamentalpunkte von der Graden — den Plückerschen Coordinaten —, multiplicirt mit $\frac{1}{2}$, und die Coordinaten des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sind, multiplicirt mit dem constanten Factor $\frac{J}{\sqrt[2]{\sigma_1^2 \alpha_1^2 + --- 2 \sigma_2 \sigma_3 \cos \mathcal{A}_1 \alpha_2 \alpha_3 ---}}$, gleich den senkrechten Abständen der Fundamentallinien von dem Punkte, multiplicirt mit $\frac{1}{2}$.

In diesen Sätzen hat das Hervortreten der vollständigen Analogie zwischen Punkt und Grade seinen Grund, durch sie findet das sogenannte Prinzip der Dualität in seiner ganzen Vollständigkeit und Allgemeinheit seine Begründung. Eine jede analytische Untersuchung, angestellt in der hier begründeten Weise, führt mit einem Rechnungsresultat auf zwei geometrische

Sätze, von denen der eine die **Interpretation** desselben, wie man sagt, nach dem **System der Punktcoordinaten**, der andere die **Interpretation** desselben nach dem **System der Liniencoordinaten** ist; zu einem jeden geometrischen Satze, welcher Gestalt er auch sein mag, gehört ein zweiter, ihm dualistisch entsprechender.

Beide Sätze ergänzen sich gleichsam; durch den ersten werden die Coordinaten des Punktes und durch den zweiten die der Graden als Grössen gekennzeichnet, deren graphische Darund Vorstellung uns geläufig ist, dagegen durch den ersten die Coordinaten der Graden und durch den zweiten die des Punktes als Grössen, von denen wir uns kein graphisches Bild zu machen vermögen, — die Coordinaten natürlich in jedem Falle multiplicirt mit einem bestimmten constanten Factor vorausgesetzt. Die beiden Sätze sind, so zu sagen, von reciprokem Charakter; sie weisen hin auf eine gewisse Art von **Reciprocität**, die unter den Punkten, unter den Graden und unter den Punkten und Graden oder vielmehr unter deren Beziehungen zu einander besteht. Diese Reciprocität beruht darin, dass die Winkelfunctionen und Entfernungen einander in gewisser Weise entsprechen. Wir bemerken zunächst unter Hinweis auf die Eingangs gegebenen Gleichungen, dass die Grössen

$$\sqrt{\sigma_1^2\alpha_1^2 + \cdots - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1\alpha_2\alpha_3 - \cdots},$$

$$\sqrt{s_1^2 a_1^2 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 - \cdots}$$

von derselben Bedeutung sind, wie die Grössen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \; a_1 + a_2 + a_3;$$

sie sind sämmtlich gleich dem Inhalte des Fundamentaldreiecks, wenn beziehungsweise als Coordinaten des Punktes und der Graden die mit $\frac{1}{2}$ multiplicirten senkrechten Abstände der Fundamentallinien von dem Punkte und der Fundamentalpunkte von der Graden und die mit $\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}, \frac{s_3}{2}$ resp. $\frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_2}{2}, \frac{\sigma_3}{2}$ multiplicirten senkrechten Abstände des Punktes von den Fundamentallinien und der Graden von den Fundamentalpunkten angesehen werden. Die Mittel- und Winkelhalbirungspunkte einer Graden in Bezug auf zwei Punkte und die Mittel- und Winkel-

halbirungslinien eines Punktes in Bezug auf zwei Grade sind durch die Gleichungen

$$\varkappa = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3,\ \varkappa' = \pm(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3);$$
$$\varkappa = \mathrm{a}'_1 + \mathrm{a}'_2 + \mathrm{a}'_3,\ \varkappa' = \pm(\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3);$$
$$\varkappa = \sqrt{\sigma_1^2\alpha_1'^2 + \cdots - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1\alpha'_2\alpha'_3 - \cdots},$$
$$\varkappa' = \pm\sqrt{\sigma_1^2\alpha_1^2 + \cdots - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1\alpha_2\alpha_3 - \cdots};$$
$$\varkappa = \sqrt{\mathrm{s}_1^2\mathrm{a}_1'^2 + \cdots - 2\mathrm{s}_2\mathrm{s}_3 \cos \mathrm{A}_1\mathrm{a}'_2\mathrm{a}'_3 - \cdots},$$
$$\varkappa' = \pm\sqrt{\mathrm{s}_1^2\mathrm{a}_1^2 + \cdots - 2\mathrm{s}_2\mathrm{s}_3 \cos \mathrm{A}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3 - \cdots}$$

bestimmt. Für jeden Punkt der Verbindungslinie zweier Punkte und jede Grade des Durchschnittspunktes zweier Graden ist

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3} \cdot \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B}},$$
$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} = -\frac{\sqrt{\sigma_1^2\alpha_1^2 + \cdots - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1\alpha_2\alpha_3 - \cdots}}{\sqrt{\sigma_1^2\alpha_1'^2 + \cdots - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1\alpha'_2\alpha'_3 - \cdots}} \cdot \frac{\sin \mathrm{AB}}{\sin \mathrm{A'B}},$$
$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} = -\frac{\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3}{\mathrm{a}'_1 + \mathrm{a}'_2 + \mathrm{a}'_3} \cdot \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B}},$$
$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} = -\frac{\sqrt{\mathrm{s}_1^2\mathrm{a}_1^2 + \cdots - 2\mathrm{s}_2\mathrm{s}_3 \cos \mathrm{A}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3 - \cdots}}{\sqrt{\mathrm{s}_1^2\mathrm{a}_1'^2 + \cdots - 2\mathrm{s}_2\mathrm{s}_3 \cos \mathrm{A}_1\mathrm{a}'_2\mathrm{a}'_3 - \cdots}} \cdot \frac{\sin \mathrm{AB}}{\sin \mathrm{A'B}}.$$

Endlich weisen wir hin auf die Gleichungen

$$(\varkappa\mu' - \mu\varkappa')(\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa')\,\mathrm{BC} = (\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa')(\varkappa\mu' + \mu\varkappa')\,\mathrm{BC'}$$
$$(\varkappa\mu' - \mu\varkappa')(\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa')\,\mathrm{tgBC} = (\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa')(\varkappa\mu' + \mu\varkappa')\,\mathrm{tgBC'},$$

in denen B den inneren Mittel- und einen Winkelhalbirungspunkt einer Graden in Bezug auf zwei Punkte oder die innere Mittel- und eine Winkelhalbirungslinie eines Punktes in Bezug auf zwei Grade bedeutet. Durch all diese Beziehungen und Gleichungen erscheint das Gesagte begründet. Wir bemerken noch, dass andere Formeln, die sonst nicht mit einander übereinstimmen, durch eine Voraussetzung übereinstimmend werden, dass z. B. die Formel

$$\varkappa'(\sigma_1^2\alpha_1\alpha'_1 + \cdots - \sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1(\alpha_2\alpha'_3 + \alpha_3\alpha_2) - \cdots)\,\mathrm{tg\,AA'} =$$
$$(\varkappa(\sigma_1^2\alpha_1^2 + \cdots - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1\alpha_2\alpha_3 - \cdots) + \varkappa'(\sigma_1^2\alpha_1\alpha'_1 + \cdots - \sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1(\alpha_2\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_2) - \cdots))\,\mathrm{tg\,AB}$$

zufolge der Relation

$$(\sigma_1^2\alpha_1\alpha'_1 + \text{- - -} - \sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1 (\alpha_2\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_2) - \text{- -})^2$$
$$+ 4J^2 (\alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2 + \alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3 + \alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1)^2 =$$
$$(\sigma_1^2\alpha_1^2 + \text{- - -} - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1\alpha_2\alpha_3 - \text{- -}) (\sigma_1^2\alpha'^2_1$$
$$+ \text{- - -} - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1\alpha'_2\alpha'_3 - \text{- -})$$

unter der Voraussetzung

$$\alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2 + \alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3 + \alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1 = 0$$

d. i. unter der Voraussetzung, dass die drei Punkte A, A′, B auf einer endlich fernen Graden liegen, in die Gleichung

$$\varkappa' \sqrt[2]{\sigma_1^2\alpha'^2_1 + \text{- - -} - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1\alpha'_2\alpha'_3 - \text{- -}}\ \operatorname{tg} AA' =$$
$$(\varkappa \sqrt[2]{\sigma_1^2\alpha_1^2 + \text{- - -} - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1\alpha_2\alpha_3 - \text{- -}}$$
$$+ \varkappa' \sqrt{\sigma_1^2\alpha'^2_1 + \text{- - -} - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1\alpha'_2\alpha'_3 - \text{- -}})\ \operatorname{tg} AB$$

übergeht und somit dieselbe Form annimmt, wie die ihr entsprechende Formel

$$\varkappa' (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)\, AA' = (\varkappa (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$
$$+ \varkappa' (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3))\, AB;$$

dieses Verhalten, dass also für Winkelfunctionen geltende Relationen an der Grenze ihrer Gültigkeit dieselbe Form annehmen, wie die entsprechenden für Entfernungen geltenden, macht zu der Annahme geneigt, die Entfernungen seien eine Art Grenzfall von gewissen den Winkelfunctionen entsprechenden Functionen.

Aus der Formel 15. ergeben sich zwei Sätze derselben Art; sie lauten, wenn die senkrechten Abstände der durch die Fundamentalpunkte $\alpha_2, \alpha_3;\ \alpha_3, \alpha_1;\ \alpha_1, \alpha_2$ gehenden, der Graden $|a'_1, a'_2, a'_3|$ parallelen Graden von einander

$$\frac{2J\,(a'_2 - a'_3)}{\sqrt[2]{a'_1\varepsilon'_1 + a'_2\varepsilon'_2 + a'_3\varepsilon'_3}},\quad \frac{2J\,(a'_3 - a'_1)}{\sqrt[2]{a'_1\varepsilon'_1 + a'_2\varepsilon'_2 + a'_3\varepsilon'_3}},$$
$$\frac{2J\,(a'_1 - a'_2)}{\sqrt[2]{a'_1\varepsilon'_1 + a'_2\varepsilon'_2 + a'_3\varepsilon'_3}},$$

absolut genommen, durch $\varepsilon'_{23}, \varepsilon'_{31}, \varepsilon'_{12}$ — so genommen, dass das Vorzeichen der Quadratwurzel das der Grösse $(a_1 + a_2 + a_3)\,(a_2a'_3 - a_3a'_2 + a_3a'_1 - a_1a'_3 + a_1a'_2 - a_2a'_1)$ ist, nennen wir sie $\bar{\varepsilon}'_{23}, \bar{\varepsilon}'_{31}, \bar{\varepsilon}'_{12}$ — bezeichnet werden, so:

Die Coordinaten des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sind, multiplicirt mit dem constanten Factor $\frac{J}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$, gleich den Parallelabständen des Punktes von den Fundamentallinien in Bezug auf die Graden $|a'_1, a'_2, a'_3|$, $|a''_1, a''_2, a''_3|$, $|a'''_1, a'''_2, a'''_3|$, multiplicirt mit $\frac{\varepsilon'_{23}}{2}$, $\frac{\varepsilon''_{31}}{2}$, $\frac{\varepsilon'''_{12}}{2}$.

Die Coordinaten der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ sind, multiplicirt mit dem constanten Factor

$$\frac{\sqrt[2]{s_1^2 a'^2_1 + \cdots - s_2 s_3 \cos A_1 (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) - \cdots}}{2(a_2 a'_3 - a_3 a'_2 + a_3 a'_1 - a_1 a'_3 + a_1 a'_2 - a_2 a'_1)},$$ gleich den Parallelabständen der Fundamentalpunkte von der Graden in Bezug auf die Grade $|a'_1, a'_2, a'_3|$, multiplicirt mit $\frac{1}{2}$.

Es ist einleuchtend, dass in diesen Sätzen und den ihnen entsprechenden die oben gegebenen Sätze als specielle Fälle mit enthalten sind. Zu bemerken ist noch, dass das Vorzeichen der Quadratwurzel mit dem Vorzeichen der Grösse $(a_1 + a_2 + a_3)(a_2 a'_3 - a_3 a'_2 + a_3 a'_1 - a_1 a'_3 + a_1 a'_2 - a_2 a'_1)$ übereinstimmend anzunehmen ist; es erhellt dann, die der Bezeichnung der senkrechten Abstände analoge Bezeichnung der Parallelabstände gewählt, das Bestehen der beiden Relationen: $\nu_1 \varepsilon'_{23} + \nu_2 \varepsilon''_{31} + \nu_3 \varepsilon'''_{12} = 2J$, $\bar{\nu}_1 \bar{\varepsilon}'_{23} + \bar{\nu}_2 \bar{\varepsilon}'_{31} + \nu_3 \bar{\varepsilon}'_{12} = 2J$. Vermittelst dieser und der ihnen entsprechenden Relationen können leicht aus den obigen Sätzen Coordinatensysteme von der Art des im 3. Abschnitte hergeleiteten entlehnt werden.

Die nach dem Prinzip der Dualität statthafte Umformung einer jeden Formel und eines jeden Satzes wird, wie bisher, in den meisten folgenden Fällen unterbleiben.

Zweites Kapitel.

Der Schwerpunkt und der Kreis der mittleren quadratischen Entfernungen materieller Punkte. Das Dreieck. Von der Reciprocität und Collineation. Die Coordinatentransformation.

13. Bedeuten $m_1, m_2, --$ constante Grössen, $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, -- die mit den zugehörigen Vorzeichen behafteten Parallelabstände der Punkte A_1, A_2, -- oder, durch ihre Formen gegeben, der Punkte $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$, $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$, -- und AA' in gleicher Weise den Parallelabstand des Punktes A oder

$$16. \quad \Big(\frac{m_1\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}}+\frac{m_2\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}}+--, \quad \frac{m_1\alpha_{12}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}}+\frac{m_2\alpha_{22}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}}+--, \quad \frac{m_1\alpha_{13}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}}+\frac{m_2\alpha_{23}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}}+--\Big)$$

von irgend einer Graden $|a_1, a_2, a_3|$ in Bezug auf die beliebige Grade $|a'_1, a'_2, a'_3|$, so hat, wie unmittelbar die Formel 15. erkennen lässt, die Gleichung

$$17. \quad m_1 . A_1A'_1 + m_2 . A_2A'_2 + -- = (m_1 + m_2 + --) AA'$$

statt. Die Summe der mit den Coefficienten m_1, m_2, --- versehenen Parallelabstände der Punkte A_1, A_2, -- von jeder Graden in Bezug auf jede beliebige Grade ist demnach gleich dem mit dem Coefficienten $m_1 + m_2 + --$ versehenen Parallelabstande des nur von der Lage der Punkte und den Coefficienten abhängigen Punktes A. Denkt man sich die Punkte A_1, A_2, -- als materielle Punkte und die Coefficienten m_1, m_2, -- als ihre Massen oder denselben proportionale Grössen, so bezeichnet man sie als solche durch $m_1 . A_1$, $m_2 . A_2$, -- und nennt dann den Punkt A den Schwerpunkt oder auch das Centrum der mittleren Abstände der Punkte $m_1 . A_1$, $m_2 . A_2$, --.

Die Verbindungslinie des Schwerpunkts A mit dem beliebigen Punkte A_0 oder $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ist die Grade

$$\left|\frac{m_1(\alpha_2\alpha_{13}-\alpha_3\alpha_{12})}{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}}+\frac{m_2(\alpha_2\alpha_{23}-\alpha_3\alpha_{22})}{\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}}+--,\right.$$
$$\frac{m_1(\alpha_3\alpha_{11}-\alpha_1\alpha_{13})}{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}}+\frac{m_2(\alpha_3\alpha_{21}-\alpha_1\alpha_{23})}{\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}}+--,$$
$$\left.\frac{m_1(\alpha_1\alpha_{12}-\alpha_2\alpha_{11})}{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}}+\frac{m_2(\alpha_1\alpha_{22}-\alpha_2\alpha_{21})}{\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}}+---\right|;$$

aus ihrer Form ist mit Rücksicht darauf, dass, wie aus den Formeln 5. und 7. ohne Schwierigkeit — im 21. Abschnitte wird es in etwas anderer Form ausführlich gezeigt — erkannt wird, z. B.

$$2.\ \frac{\left\{\begin{array}{l} s_1^2(\alpha_2\alpha_{13}-\alpha_3\alpha_{12})(\alpha_2\alpha_{23}-\alpha_3\alpha_{22})+-- \\ \quad -s_2s_3\cos A_1\,((\alpha_3\alpha_{11}-\alpha_1\alpha_{13})(\alpha_1\alpha_{22}-\alpha_2\alpha_{21}) \\ \qquad -(\alpha_1\alpha_{12}-\alpha_2\alpha_{11})(\alpha_3\alpha_{21}-\alpha_1\alpha_{23}))--- \end{array}\right\}}{(\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13})(\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23})(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}$$
$$=\overline{A_1A_0}^2+\overline{A_2A_0}^2-\overline{A_1A_2}^2$$

ist, sofort ersichtlich, dass

$$(m_1+m_2+--)^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2.\overline{AA_0}^2$$
$$=m_1^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2.\overline{A_1A_0}^2+m_2^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2.\overline{A_2A_0}^2$$
$$+--+m_1m_2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2.(\overline{A_1A_0}^2+\overline{A_2A_0}^2-\overline{A_1A_2}^2)+--$$

oder also dass

$$m_1.\overline{A_1A_0}^2+m_2.\overline{A_2A_0}^2+--$$
$$=(m_1+m_2+--)\overline{AA_0}^2+\frac{m_1m_2.\overline{A_1A_2}^2+--}{m_1+m_2+--}$$

ist, und es hat demnach, wenn wir

$$\overline{\mathbf{A}A}^2=\pm\frac{m_1m_2.\overline{A_1A_2}^2+--}{(m_1+m_2+--)^2}$$

und

$$\overline{AA_0}^2\pm\overline{\mathbf{A}A}^2=\overline{\mathbf{A}A_0}^2$$

setzen und somit durch **A** einen der Punkte eines Kreises bezeichnen, dessen Centrum der Punkt A_0 ist, und der durch die beiden Punkte hindurchgeht, die auf der zu der Verbindungslinie des Schwerpunkts mit dem Punkte A_0 senkrechten Graden des Schwerpunkts oder auf zwei Graden des Punktes A_0 und einem Kreise liegen, dessen Centrum der Schwerpunkt A und dessen quadratische Entfernung von ihm

$$\overline{\mathbf{A}A}^2=\pm\frac{m_1m_2.\overline{A_1A_2}^2+--}{(m_1+m_2+--)^2}$$

— in dem ersten Falle hat das obere, in dem andern das untere Vorzeichen Geltung — ist, die der Gleichung 17. gleichgebildete Gleichung

$$m_1 . \overline{A_1 A_0}^2 + m_2 . \overline{A_2 A_0}^2 + \cdots = (m_1 + m_2 + \cdots) . \overline{\mathfrak{A} A_0}^2$$

statt. Die Summe der mit den Coefficienten $m_1, m_2, \cdots$ versehenen Quadrate der Entfernungen irgend eines Punktes von den Punkten $A_1, A_2, \cdots$ ist gleich dem mit dem Coefficienten $m_1 + m_2 + \cdots$ versehenen Quadrate der Entfernung des Punktes von jedem Punkte eines um ihn als Centrum beschriebenen Kreises, der in gekennzeichneter Weise bestimmt ist durch einen nur von der Lage der Punkte und den Coefficienten abhängigen Kreis. Diesen Kreis nennen wir den Kreis der mittleren quadratischen Entfernungen der Punkte $m_1 . A_1, m_2 . A_2, \cdots$. Wegen der zwei Vorzeichen in dem seinen Radius bestimmenden Ausdrucke müsste eigentlich von zwei Kreisen der mittleren quadratischen Entfernungen die Rede sein; weil aber von ihnen stets nur einer graphisch darstellbar ist, so sprechen wir auch nur von einem, darunter beide begreifend; nur wenn der eine oder der andere von ihnen vornehmlich gemeint wird, soll er, je nachdem das obere oder untere Vorzeichen als geltend angesehen wird, als der erste oder der zweite bezeichnet werden.

In dem Falle $m_1 + m_2 + \cdots = 0$ ist im Allgemeinen der Schwerpunkt der Punkte $m_1 . A_1, m_2 . A_2, \cdots$ ein unendlich ferner Punkt; nur, wenn $\frac{m_1 \alpha_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}} + \frac{m_2 \alpha_{21}}{\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}} + \cdots = 0$, u. s. f. und also offenbar jeder von den Punkten der Schwerpunkt der übrigen ist, kann jeder beliebige Punkt als Schwerpunkt aufgefasst werden.

Der Schwerpunkt von Punkten einer Graden ist stets selbst ein Punkt dieser Graden, ausser wenn ein jeder der Punkte der Schwerpunkt der übrigen ist.

Jeder Punkt kann als Schwerpunkt von nicht in einer Graden liegenden Punkten, als Schwerpunkt von Punkten einer Graden im Allgemeinen aber nur jeder Punkt derselben Graden angesehen

werden, wenn diesen Punkten geeignete Coefficienten beigelegt werden, und zwar sind von diesen Coefficienten, wenn die Anzahl der Punkte n ist, n — 3 resp. n — 2 beliebig und von deren beliebigen Annahme die übrigen 3 resp. 2 abhängig. Nur in zwei Fällen sind demnach die Coefficienten durchaus bestimmt, nämlich wenn von 2 Punkten und von 3 nicht in einer Graden liegenden Punkten gehandelt wird.

Der Schwerpunkt der durch die Formen $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$, $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$ gegebenen Punkte A_1, A_2 ist der Punkt $(\varkappa, \varkappa')$ oder A, wenn die ihnen beizulegenden Coefficienten

$$m_1 = (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})\,\varkappa,\ m_2 = (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})\,\varkappa'$$

oder

$$m_1 = A_2A,\ m_2 = AA_1$$

sind. Für den Radius des Kreises der mittleren quadratischen Entfernungen hat man wegen $m_1 + m_2 = A_2A_1$ in diesem Falle

$$\pm\, \overline{AA}^2 = A_2A \,.\, AA_1;$$

ferner ist

$$A_1A_2 \,.\, \overline{AA_0}^2 + A_2A \,.\, \overline{A_1A_0}^2 + AA_1 \,.\, \overline{A_2A_0}^2 = 0$$

oder also

$$A_1A_2 \,.\, \overline{AA_0}^2 + A_2A \,.\, \overline{A_1A_0}^2 + AA_1 \,.\, \overline{A_2A_0}^2 + A_1A_2 \,.\, A_2A \,.\, AA_1 = 0$$

(Stewarts Theorem) und endlich

$$A_1A_2 \,.\, AA' + A_2A \,.\, A_1A'_1 + AA_1 \,.\, A_2A'_2 = 0.$$

Wenn A'_1, A'_2 die auf dem Kreise der mittleren quadratischen Entfernungen der Punkte A_1, A_2 liegenden Punkte ihrer Verbindungslinie sind, so ist

$$AA_1 \,.\, AA_2 = \pm\, AA'_1 \,.\, AA'_2$$

und, je nachdem das obere oder untere Vorzeichen als geltend angesehen wird,

$$\frac{A'_1A_1}{A'_2A_1} \cdot \frac{A'_1A_2}{A'_2A_2} = -1,\ \frac{A'_1A_1}{A'_2A_1} : \frac{A'_1A_2}{A'_2A_2} = -1,$$

weil diese Relationen sich auf die vorige vermittelst der Gleichungen $A'_2A = AA'_1$, $A'_1A_1 = A'_1A + AA_1$, u. s. f. zurückführen lassen. Von den diesen Relationen genügenden Punkten werden wir weiterhin handeln; hier bemerken wir nur, dass die durch die Relation

$$\frac{A'_1A_1}{A'_2A_1} : \frac{A'_1A_2}{A'_2A_2} = -1$$

verknüpften Punkte A'_1, A'_2, A_1, A_2 **harmonische Punkte** genannt werden, und dass demnach der Gleichung 10. zufolge die Punkte

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3), (\varkappa, \varkappa'), (\varkappa, -\varkappa')$$

vier harmonische Punkte sind.

Die Discussion des zweiten Falles folgt weiter unten.

14. Die Punkte

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}), (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$$

und die Graden

$$|a_{11}, a_{12}, a_{13}|, |a_{21}, a_{22}, a_{23}|, |a_{31}, a_{32}, a_{33}|$$

seien die Eckpunkte und Seitenlinien eines Dreiecks. Die Coordinaten derselben nehmen wir in einer gewissen Abhängigkeit von einander an; wir nehmen nämlich, was stets möglich ist, da die aus den Coordinaten der drei Punkte gebildete Determinante

$$-\Delta^3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

die in entwickelter Form also lautet:

$$-\Delta^3 = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{12} + \alpha_{32}\alpha_{13}\alpha_{21} \\ - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}\alpha_{13} - \alpha_{33}\alpha_{12}\alpha_{21},$$

offenbar nicht Null ist — sie ist es nur dann, wenn die drei Punkte auf einer Graden liegen — die Coordinaten der drei Graden so an, dass

$$-\Delta\, a_{11} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}, \quad -\Delta\, a_{12} = \alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{33}, \\ -\Delta\, a_{13} = \alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}$$

$$-\Delta\, a_{21} = \alpha_{32}\alpha_{13} - \alpha_{33}\alpha_{12}, \quad -\Delta\, a_{22} = \alpha_{33}\alpha_{11} - \alpha_{31}\alpha_{13}, \\ -\Delta\, a_{23} = \alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{32}\alpha_{11}$$

$$-\Delta\, a_{31} = \alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}, \quad -\Delta\, a_{32} = \alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{23}, \\ -\Delta\, a_{33} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

ist, alsdann gelten — und das nöthigt zu dieser Annahme der Coordinaten — wegen der in Bezug auf a und α symmetrischen Form der aus diesen Gleichungen sofort sich ergebenden, je neun Gleichungen repräsentirenden Formeln

$$a_{1\iota}\alpha_{1\varkappa} + a_{2\iota}\alpha_{2\varkappa} + a_{3\iota}\alpha_{3\varkappa} = \varepsilon\Delta^2 \\ a_{\iota 1}\alpha_{\varkappa 1} + a_{\iota 2}\alpha_{\varkappa 2} + a_{\iota 3}\alpha_{\varkappa 3} = \varepsilon\Delta^2,$$

in denen für ι, $\varkappa$ die Zahlen 1, 2, 3 zu setzen sind und, je

nachdem $\iota = \varkappa$ ist, oder nicht, ε Eins oder Null ist, diese Gleichungen auch, wenn die lateinischen und griechischen kleinen Buchstaben mit einander vertauscht werden; die Coordinaten der drei Punkte sind dann ebenso durch die Coordinaten der drei Graden dargestellt, wie diese durch jene.

Die specielle Annahme der Relationen

$$a_{23}a_{31}a_{12} = a_{32}a_{13}a_{21}\,,\quad \alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{12} = \alpha_{32}\alpha_{13}\alpha_{21}$$

und der Relationen

$$a_{23}a_{31}a_{12} = \alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{12}\,,\quad a_{32}a_{13}a_{21} = \alpha_{32}\alpha_{13}\alpha_{21}$$

unter den Coordinaten, von denen die eine die andere nach sich zieht, und die auch sämmtlich zugleich bestehen können, führt auf zwei bemerkenswerthe Sätze, die wir ohne den leichten Beweis an dieser Stelle in folgender Weise geben.

Sind zwei Dreiecke so gelegen, dass die drei Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte durch einen Punkt (Collineationspunkt) gehen, so liegen die drei Durchschnittspunkte entsprechender Seitenlinien auf einer Graden (Collineationslinie), und umgekehrt.

Sind zwei Dreiecke so gelegen, dass die drei Durchschnittspunkte der entsprechenden Verbindungslinien nicht entsprechender Eckpunkte auf einer Graden liegen, so gehen die drei Verbindungslinien der entsprechenden Durchschnittspunkte nicht entsprechender Seitenlinien durch einen Punkt, und umgekehrt.

15. Es seien nunmehr die Punkte A_1, A_2, A_3 oder $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$, $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$, $(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$ drei nicht in einer Graden liegende Punkte oder die Eckpunkte eines Dreiecks, für das die im vorigen Abschnitte gegebenen reciproken Beziehungen zwischen den Coordinaten der Eckpunkte und Seitenlinien statt haben mögen, und ferner sei der Punkt A oder $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der Punkt, der ihr Schwerpunkt sein soll. Die Coefficienten, die dann den Punkten beigelegt werden müssen, ergeben sich aus den Gleichungen

$$\frac{m_1\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}} + \frac{m_2\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}} + \frac{m_3\alpha_{31}}{\alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{33}} = \alpha_1$$

$$\frac{m_1\alpha_{12}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}} + \frac{m_2\alpha_{22}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}} + \frac{m_3\alpha_{32}}{\alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{33}} = \alpha_2$$

$$\frac{m_1\alpha_{13}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}} + \frac{m_2\alpha_{23}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}} + \frac{m_3\alpha_{33}}{\alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{33}} = \alpha_3$$

nun in der folgenden Weise:

$$\Delta^2 m_1 = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3) \,.\, (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})$$
$$\Delta^2 m_2 = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3) \,.\, (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})$$
$$\Delta^2 m_3 = (a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3) \,.\, (\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33}).$$

Das Quadrat des Radius des Kreises der mittleren quadratischen Entfernungen der drei Punkte ist

$$\overline{\mathbf{A}A}^2 = \pm \frac{m_2 m_3 \,.\, \overline{A_2A_3}^2 + m_3 m_1 \,.\, \overline{A_3A_1}^2 + m_1 m_2 \,.\, \overline{A_1A_2}^2}{(m_1 + m_2 + m_3)^2},$$

und endlich gelten in diesem Falle die Gleichungen

$$m_1 \,.\, A_1A'_1 + m_2 \,.\, A_2A'_2 + m_3 \,.\, A_3A'_3 = (m_1 + m_2 + m_3)\, AA'$$
$$m_1 \,.\, \overline{A_1A_0}^2 + m_2 \,.\, \overline{A_2A_0}^2 + m_3 \,.\, \overline{A_3A_0}^2 = (m_1 + m_2 + m_3)\, \overline{\mathbf{A}A_0}^2;$$

übrigens können in leichter Weise diese Gleichungen auch in der Form

$$\overline{\mathbf{A}A}^2 = \mp \frac{\overline{\mathbf{A}A_1}^4 . \overline{A_2A_3}^2 + \cdots - 2\overline{\mathbf{A}A_2}^2 . \overline{\mathbf{A}A_3}^2 . \overline{A_3A_1}^2 . \overline{A_1A_2}^2 - \cdots}{4\overline{A_2A_3}^2 . \overline{A_3A_1}^2 . \overline{A_1A_2}^2}$$

$$-\, 2\overline{A_2A_3}^2 . \overline{A_3A_1}^2 . \overline{A_1A_2}^2 . AA' = \overline{\mathbf{A}A_1}^2 . A_1A'_1 . \overline{A_2A_3}^4 + \cdots$$
$$-\, (\overline{\mathbf{A}A_2}^2 . A_3A'_3 + \overline{\mathbf{A}A_3}^2 . A_2A'_2)\, \overline{A_3A_1}^2 . \overline{A_1A_2}^2 - \cdots$$
$$-\, 2\overline{A_2A_3}^2 . \overline{A_3A_1}^2 . \overline{A_1A_2}^2 . \overline{\mathbf{A}A_0}^2 = \overline{\mathbf{A}A_1}^2 . \overline{A_1A_0}^2 . \overline{A_2A_3}^4 + \cdots$$
$$-\, (\overline{\mathbf{A}A_2}^2 . \overline{A_3A_0}^2 + \overline{\mathbf{A}A_3}^2 . \overline{A_2A_0}^2)\, \overline{A_3A_1}^2 . \overline{A_1A_2}^2 - \cdots$$

dargestellt werden.

Es giebt einen Punkt A_0 — wir bezeichnen ihn durch U —, der so liegt, dass

$$\overline{A_1U}^2 = \overline{A_2U}^2 = \overline{A_3U}^2 = \overline{\mathbf{A}U}^2$$

ist; er ist das Centrum des durch die drei Punkte A_1, A_2, A_3 gehenden oder des dem durch diese Punkte gebildeten Dreieck umschriebenen Kreises; und es ist also, wenn sein Radius r ist,

$$r^2 = \overline{\mathbf{A}U}^2 = \overline{AU}^2 \pm \overline{\mathbf{A}A}^2$$

oder

$$\overline{\mathbf{A}A}^2 = \pm (r^2 - \overline{AU}^2).$$

D i e q u a d r a t i s c h e E n t f e r n u n g d e s K r e i s e s d e r m i t t l e r e n q u a d r a t i s c h e n E n t f e r n u n g e n d e r P u n k t e A_1, A_2, A_3 v o n d e r e n S c h w e r p u n k t, s e i n e m C e n t r u m A i s t demnach gleich der mit dem Plus- oder Minuszeichen behafteten Differenz aus dem Quadrate des Radius des durch sie gehenden Kreises und der quadratischen Entfernung des Centrums dieses Kreises von dem Punkte A oder g l e i c h d e r m i t

dem Plus- oder Minuszeichen behafteten Potenz des Punktes A in Bezug auf den durch sie gehenden Kreis. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis nennen wir nämlich die Differenz aus dem Quadrate seines Radius und der quadratischen Entfernung seines Centrums von jenem Punkte oder, da, wenn die auf irgend einer Graden des Punktes A liegenden Punkte des Kreises durch B, C und der innere Mittelpunkt derselben in Bezug auf sie durch M bezeichnet werden,

$$r^2 - \overline{AU}^2 = \overline{BU}^2 - \overline{AU}^2 = (\overline{BM}^2 + \overline{MU}^2) - (\overline{AM}^2 + \overline{MU}^2)$$
$$= \overline{BM}^2 - \overline{AM}^2 = - AB \, . \, AC$$

ist, das durch den Punkt und den Kreis bestimmte, mit dem Minuszeichen behaftete constante Product aus den Entfernungen des Punktes von den auf dem Kreise liegenden Punkten einer jeden Graden desselben, abweichend von der gewöhnlichen Erklärung der Potenz, nach der sie den entgegengesetzten Werth hat; sie ist positiv, negativ oder Null, je nachdem der Punkt innerhalb, ausserhalb oder auf dem Kreise liegt. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis ist demnach gleich der mit dem Plus- oder Minuszeichen behafteten quadratischen Entfernung des Kreises der mittleren quadratischen Entfernungen jeder beliebiger drei Punkte des Kreises von jenem Punkte als seinem Centrum und dem Schwerpunkte der drei Punkte.

Die Potenz des Centrums des durch die Punkte A_1, A_2, A_3 gehenden Kreises in Bezug auf diesen ist gleich dem Quadrate seines Radius, und daher ein Kreis der (erste) zu seinem Centrum gehörige Kreis der mittleren quadratischen Entfernungen jeder drei auf ihm liegender Punkte.

16. In einem Falle nehmen die Coefficienten, die den drei Punkten A_1, A_2, A_3 beigelegt werden müssen, wenn der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ihr Schwerpunkt sein soll, eine besonders einfache Form an, nämlich wenn die drei Punkte die Fundamentalpunkte sind; es ist dann $m_1 = \alpha_1$, $m_2 = \alpha_2$, $m_3 = \alpha_3$. Die Coordinaten des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sind darnach die Coefficienten,

die den Fundamentalpunkten beigelegt werden müssen, wenn er ihr Schwerpunkt sein soll, oder, wenn wir die Coefficienten, die drei Punkten beizulegen sind, damit ein Punkt ihr Schwerpunkt sei, die barycentrischen Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf das durch sie gebildete Dreieck nennen, die Coordinaten des Punktes in unserm trilinearen Coordinatensystem sind zugleich seine barycentrischen Coordinaten in Bezug auf das Fundamentaldreieck.

Für jeden Punkt A oder $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ gelten somit in Bezug auf ein Dreieck — die Bezeichnung desselben als Fundamentaldreieck unterlassen wir in diesem und den nächstfolgenden Abschnitten — die Gleichungen

$$\alpha_1 . A_1A'_1 + \alpha_2 . A_2A'_2 + \alpha_3 . A_3A'_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) . AA'$$

18. $$\alpha_1 . \overline{A_1A_0}^2 + \alpha_2 . \overline{A_2A_0}^2 + \alpha_3 . \overline{A_3A_0}^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) . \overline{AA_0}^2,$$

und seine Potenz in Bezug auf den demselben umschriebenen Kreis ist

$$\frac{s_1^2\alpha_2\alpha_3 + s_2^2\alpha_3\alpha_1 + s_3^2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2}.$$

Dieser Ausdruck kann mit Rücksicht auf die im Eingange des 12. Abschnitts stehenden Gleichungen in die Form

$$\frac{s_1s_2s_3\,(s_1\mu_2\mu_3 + s_2\mu_3\mu_1 + s_3\mu_1\mu_2)}{4J^2}$$

oder also wegen der Relationen

$4Jr = s_1s_2s_3$, $s_1 = 2r \sin A_1$, $s_2 = 2r \sin A_2$, $s_3 = 2r \sin A_3$

in die Form

$$4r^2 . \frac{\mu_2\mu_3 \sin A_1 + \mu_3\mu_1 \sin A_2 + \mu_1\mu_2 \sin A_3}{2J}$$

übergeführt werden; es erhellt daraus, da offenbar

$$\mu_2\mu_3 \sin A_1 + \mu_3\mu_1 \sin A_2 + \mu_1\mu_2 \sin A_3,$$

absolut genommen, der doppelte Flächeninhalt des durch die drei, auf den Seitenlinien des Dreiecks von den zu ihnen senkrechten Graden des Punktes bestimmten Punkte gebildeten Dreiecks oder, indem wir den Flächeninhalt dieses Dreiecks als den Potenzinhalt des Punktes bezeichnen, der doppelte Potenzinhalt des Punktes ist, der Satz: Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis ist, je nachdem

er innerhalb, ausserhalb oder auf dem Kreise liegt, gleich dem vierfachen Quadrate seines Radius, multiplicirt mit dem mit dem Plus- oder Minus- oder beiden Zeichen zugleich behafteten Verhältnisse des zu jeden drei Punkten des Kreises gehörigen Potenzinhaltes des Punktes zu dem Flächeninhalte des durch sie bestimmten Dreiecks. Der zu jeden drei Punkten eines Kreises gehörige Potenzinhalt eines jeden Punktes dieses Kreises ist Null; es liegen daher die drei Punkte, die auf den Verbindungslinien jeder drei Punkte eines Kreises durch die zu ihnen senkrechten Graden eines jeden Punktes des Kreises beziehungsweise bestimmt werden, auf einer Graden.

Endlich bemerken wir, dass nach Formel 7. des 8. Abschnitts, wenn die Potenz eines Punktes in Bezug auf den umschriebenen Kreis durch den ihn bezeichnenden Buchstaben bezeichnet und der Punkt A_0 durch die Form $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ gegeben wird,

$$\overline{A_1A_0}^2 + A_0 = \frac{s_2^2\alpha'_3 + s_3^2\alpha'_2}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3}, \quad \overline{A_2A_0}^2 + A_0 = \frac{s_3^2\alpha'_1 + s_1^2\alpha'_3}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3},$$

$$\overline{A_3A_0}^2 + A_0 = \frac{s_1^2\alpha'_2 + s_2^2\alpha'_1}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3}$$

ist, und dass demnach mit in Folge der Gleichung

$$\mathbf{A}A_0^2 = \overline{AA_0}^2 + A$$

zwischen den Potenzen und der Entfernung zweier Punkte die Relation

$$\overline{AA_0}^2 + A + A_0 = \qquad 19.$$
$$\frac{s_1^2(\alpha_2\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_2) + s_2^2(\alpha_3\alpha'_1 + \alpha_1\alpha'_3) + s_3^2(\alpha_1\alpha'_2 + \alpha_2\alpha'_1)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)}$$

besteht.

17. Die unter 18. gegebene Gleichung

$$\frac{\alpha_1 . \overline{A_1A_0}^2 + \alpha_2 . \overline{A_2A_0}^2 + \alpha_3 . \overline{A_3A_0}^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$
$$- \frac{s_1^2\alpha_2\alpha_3 + s_2^2\alpha_3\alpha_1 + s_3^2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2} - \overline{AA_0}^2 = 0$$

lässt sich durch Einführung der constanten Grössen r und λ und der abkürzenden Bezeichnungen

$$\lambda(\overline{A_1A_0}^2 - r^2) = a_{11},\ \lambda(\overline{A_2A_0}^2 + \overline{A_3A_0}^2 - 2r^2 - s_1^2) = 2a_{23},\ \text{u. s. f.}$$

in die Form

$$\frac{a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 + 2a_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2} + \lambda(r^2 - \overline{AA_0}^2) = 0$$

bringen. In dieser Form zeigt sie, dass für alle Punkte A oder $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, die von dem Punkte A_0 dieselbe Entfernung r haben, die Gleichung

$$a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 + 2a_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0$$

besteht, und dass umgekehrt allen Punkten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, die dieser Gleichung genügen, jene Eigenschaft zukommt; diese Gleichung stellt daher einen Kreis dar, sie ist die Gleichung des Kreises, sofern die Coefficienten derselben von der durch die obigen Gleichungen gekennzeichneten Beschaffenheit sind oder sofern für sie die Relationen

$$a_{22} + a_{33} - 2a_{23} = \lambda s_1^2,\ a_{33} + a_{11} - 2a_{31} = \lambda s_2^2,\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} = \lambda s_3^2$$

bestehen, denn dann sind sie von dieser Beschaffenheit. Die Gleichung

$$a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 + 2a_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0$$

stellt demnach einen Kreis dar, wenn,

$$\lambda_1 = a_{22} + a_{33} - 2a_{23},\ \lambda_2 = a_{33} + a_{11} - 2a_{31},\ \lambda_3 = a_{11} + a_{22} - 2a_{12}.$$

gesetzt,

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = s_1^2 : s_2^2 : s_3^2$$

ist, und der Ausdruck

$$-\frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 + 2a_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2}$$

ist offenbar die Potenz des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ in Bezug auf diesen Kreis. Man kann diesem Ausdruck auch die Form

$$\frac{s_1^2\alpha_2\alpha_3 + s_2^2\alpha_3\alpha_1 + s_3^2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2} - \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{a_{11}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

geben, und erkennt daraus, dass die Punkte, die in Bezug auf jenen Kreis und den dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreis gleiche Potenzen haben, auf der Graden $|a_{11}, a_{22}, a_{33}|$ liegen; der Ort des Punktes, der in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenzen hat, ist darnach eine Grade, die Grade der gleichen Potenzen in Bezug auf jene Kreise.

Selbstverständlich entspricht dem Kreise als dem Orte aller Punkte, die von einem Punkte dieselbe Entfernung haben, dualistisch eine Curve, die von den Graden umhüllt wird, die alle von einer Graden dieselbe Entfernung haben, und diese Curve ist in analoger Weise durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha_{11}a_1^2 + \alpha_{22}a_2^2 + \alpha_{33}a_3^2 + 2\alpha_{23}a_2a_3 + 2\alpha_{31}a_3a_1 + 2\alpha_{12}a_1a_2 = 0$$

unter der Bedingung, dass die Grössen $\alpha_{22} + \alpha_{33} - 2\alpha_{23}$, $\alpha_{33} + \alpha_{11} - 2\alpha_{31}$, $\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}$ sich der Reihe nach wie die Grössen σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2 zu einander verhalten, gegeben. Die sämmtlichen durch eine homogene Gleichung zweiten Grades dargestellten Curven werden Kegelschnitte genannt; von ihnen handelt der zweite Theil dieser Schrift.

18. Die Potenz des Schwerpunkts des Dreiecks (1, 1, 1) in Bezug auf den umschriebenen Kreis ist

$$\frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{3^2} \text{ oder } \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3^2}.$$

Das Quadrat der dreifachen Entfernung des Schwerpunkts eines Dreiecks von einem der Punkte des umschriebenen Kreises, die auf der zu der Eulerschen Graden des Dreiecks, d. i. der Verbindungslinie des Centrums dieses Kreises mit dem Schwerpunkte, senkrechten Graden des Schwerpunkts liegen, ist darnach gleich der Summe der Quadrate der Seiten des Dreiecks.

Die Form des Centrums des umschriebenen Kreises ist, weil dasselbe der Durchschnittspunkt der zu den Seitenlinien des Dreiecks senkrechten Graden ihrer inneren Mittelpunkte ist und demnach $r^2 - \frac{s_1^2}{4} = \frac{1}{4}s_1^2 \cot^2 A_1$, u. s. f. seine senkrechten Quadratabstände von den Seitenlinien sind,

$$(s_1^2 \cot A_1,\ s_2^2 \cot A_2,\ s_3^2 \cot A_3)$$

oder

$(1 - \cot A_2 \cot A_3,\ 1 - \cot A_3 \cot A_1,\ 1 - \cot A_1 \cot A_2)$.

In dieser letzteren Gestalt weist sie hin auf die Punkte

$$(\cot A_2 \cot A_3,\ \cot A_3 \cot A_1,\ \cot A_1 \cot A_2)$$
$$(1 + \cot A_2 \cot A_3,\ 1 + \cot A_3 \cot A_1,\ 1 + \cot A_1 \cot A_2).$$

Der erste von diesen Punkten, die wir durch H und F bezeichnen, ist der sogenannte Höhenpunkt des Dreiecks, der Punkt, durch den, wie wir am Ende des 11. Abschnitts bemerkt haben, die durch die Eckpunkte des Dreiecks gehenden, zu seinen Seitenlinien senkrechten Graden hindurchgehen, der zweite das Centrum des sogenannten Feuerbachschen Kreises d. i. des Kreises, der durch die Durchschnittspunkte dieser Graden mit den Seitenlinien oder die Höhenfusspunkte des Dreiecks hindurchgeht. Denn mit Rücksicht auf die Formeln

$$s_1^2 \cot A_1 + s_2^2 \cot A_2 + s_3^2 \cot A_3 = 4J$$
$$\cot A_2 \cot A_3 + \cot A_3 \cot A_1 + \cot A_1 \cot A_2 = 1$$
$$s_1^2 \cot A_2 \cot A_3 + s_2^2 \cot A_3 \cot A_1 + s_3^2 \cot A_1 \cot A_2$$
$$= 3 \cdot \frac{s_1^2 s_2^2 s_3^2}{4J^2} - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$$

$$4J \cot A_1 \cot A_2 \cot A_3 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2 \cdot \frac{s_1^2 s_2^2 s_3^2}{4J^2}$$

findet man leicht die Potenz dieses zweiten Punktes

$$F = \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{4} - \tfrac{3}{4} r^2$$

und darnach

$$\overline{AF}^2 + A - \frac{r^2}{4} = J \cdot \frac{\cot A_1 \alpha_1 + \cot A_2 \alpha_2 + \cot A_3 \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3},$$

und sieht daraus, dass der Ausdruck

$$\frac{s_1^2 \alpha_2 \alpha_3 + s_2^2 \alpha_3 \alpha_1 + s_3^2 \alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2} - J \cdot \frac{\cot A_1 \alpha_1 + \cot A_2 \alpha_2 + \cot A_3 \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3},$$

der für die bezeichneten, durch die Formen $(0, \cot A_3, \cot A_2)$, u. s. f. darstellbaren Punkte verschwindet, die Potenz des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ in Bezug auf einen Kreis ist, dessen Centrum der Punkt F und dessen Radius der halbe Radius des umschriebenen Kreises ist.

Die Potenz des Höhenpunkts in Bezug auf den umschriebenen Kreis ist

$$H = 4J \cot A_1 \cot A_2 \cot A_3$$

und darnach

$$\overline{AH}^2 + A + \tfrac{1}{2}H = 2J \cdot \frac{\cot A_1\alpha_1 + \cot A_2\alpha_2 + \cot A_3\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

Für das Centrum des umschriebenen Kreises ist natürlich

$$\overline{AU}^2 + A - r^2 = 0,$$

für den Schwerpunkt — er sei durch S bezeichnet —

$$\overline{AS}^2 + A - 2S = -\tfrac{1}{3} \cdot \frac{s_1^2\alpha_1 + s_2^2\alpha_2 + s_3^2\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

oder

$$\overline{AS}^2 + A = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\sigma_1^2\alpha_1 + \sigma_2^2\alpha_2 + \sigma_3^2\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

oder endlich

$$\overline{AS}^2 + A - \tfrac{1}{2}S = \tfrac{2}{3}J \cdot \frac{\cot A_1\alpha_1 + \cot A_2\alpha_2 + \cot A_3\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

Die Annahme $\cot A_1\alpha_1 + \cot A_2\alpha_2 + \cot A_3\alpha_3 = 0$ bedingt hiernach die Gleichungen

$$A = \frac{r^2}{4} - \overline{AF}^2 = -\tfrac{1}{2}H - \overline{AH}^2 = \tfrac{1}{2}S - \overline{AS}^2;$$

es folgt daraus, dass die Grade

$$|\cot A_1, \cot A_2, \cot A_3|$$

die **Grade der gleichen Potenzen** ist in Bezug auf den umschriebenen und den Feuerbachschen und zugleich in Bezug auf einen Kreis, dessen Centrum der Höhenpunkt und dessen quadratische Entfernung von ihm seine halbe mit dem Minuszeichen behaftete Potenz in Bezug auf den umschriebenen Kreis ist, — er heisse kurz **der Kreis um den Höhenpunkt** — und endlich einen Kreis, dessen Centrum der Schwerpunkt und dessen quadratische Entfernung von ihm seine halbe Potenz in Bezug auf den umschriebenen Kreis ist.

Die Potenz des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ in Bezug auf den Kreis um den Höhenpunkt ist

$$\frac{s_1^2\alpha_2\alpha_3 + s_2^2\alpha_3\alpha_1 + s_3^2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2} - 2J \cdot \frac{\cot A_1\alpha_1 + \cot A_2\alpha_2 + \cot A_3\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_3}$$

— sie kann demgemäss auch in der Form

$$-2J \cdot \frac{\cot A_1\alpha_1^2 + \cot A_2\alpha_2^2 + \cot A_3\alpha_3^2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2}$$

gegeben werden — und folglich ist, wie ein Blick auf den oben gegebenen Ausdruck für die Potenz in Bezug auf den Feuer-

bachschen Kreis zeigt, die Potenz eines jeden Punktes in Bezug auf den Feuerbachschen Kreis gleich dem arithmetischen Mittel zwischen seinen Potenzen in Bezug auf den umschriebenen und den Kreis um den Höhenpunkt.

Die Grade $|s_1^2, s_2^2, s_3^2|$ ist der Ort des Punktes, dessen Potenz in Bezug auf den umschriebenen Kreis gleich ist der Differenz aus der doppelten Potenz des Schwerpunkts und dessen quadratischer Entfernung von ihm, die Grade $|\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2|$ der Ort des Punktes, für den sie gleich ist seiner mit dem Minuszeichen behafteten quadratischen Entfernung vom Schwerpunkte. Diese Graden sind der Graden $|\cot A_1, \cot A_2, \cot A_3|$ und auch der Graden $|\cot \mathcal{A}_1, \cot \mathcal{A}_2, \cot \mathcal{A}_3|$ parallel, weil $3s_1^2 + 3\sigma_1^2 = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = 4s_1^2 + 8J \cot A_1$, u. s. f. ist.

Der Schwerpunkt und der Höhenpunkt des Dreiecks und die Centra des umgeschriebenen und des Feuerbachschen Kreises liegen auf der Eulerschen Graden, sie sind vier harmonische Punkte und mit einander verknüpft durch die Relation

$$FS : SU : HF : HU = 1 : 2 : 3 : 6;$$

das ergiebt sich aus ihren Formen, theils unmittelbar, theils vermittelst der Formel 9. des 8. Abschnitts durch die Gleichungen

$$2FS = SU, \quad 3SU = 2HF, \quad 2HF = HU.$$

Diese Proportion zeigt insbesondere, dass die Verbindungslinie der Centra des Feuerbachschen und des umschriebenen Kreises durch den Schwerpunkt innen und durch den Höhenpunkt aussen nach dem Verhältniss $1:2$ d. i. nach dem Verhältnisse der Radien der genannten Kreise getheilt wird. Man nennt die beiden Punkte der Verbindungslinie der Centra zweier Kreise, die diese innen und aussen nach dem Verhältnisse ihrer Radien theilen, den inneren und den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise; durch den inneren gehen alle Graden, welche die auf entgegengesetzten, durch den äusseren alle, welche die nicht auf entgegengesetzten Seiten jener Verbindungslinie auf den Kreisen liegenden Punkte paralleler Diametrallinien verbinden, und jede durch sie gehende Grade wird durch die Kreise beziehungsweise innen und aussen nach dem Verhältnisse ihrer Radien getheilt. Darnach ist der Schwerpunkt der innere und der Höhenpunkt der äussere

Aehnlichkeitspunkt des Feuerbachschen und des umschriebenen Kreises; jede Grade des Schwerpunkts wird durch diese Kreise innen und jede Grade des Höhenpunkts aussen nach dem Verhältniss 1:2 getheilt. Der Feuerbachsche Kreis geht daher u. a. durch die Seitenmittelpunkte des Dreiecks.

Vier merkwürdige Punkte des Dreiecks — als merkwürdige Punkte und Grade des Dreiecks sind alle solche Punkte und Graden anzusehen, deren Coordinaten gleichgebildete Functionen der Seiten und Winkel des Dreiecks sind — sind ferner die Punkte

$$(s_1, s_2, s_3), (-s_1, s_2, s_3), (s_1, -s_2, s_3), (s_1, s_2, -s_3),$$

— wir bezeichnen sie kurz durch E_0, E_1, E_2, E_3. Ihre Formen zeigen sofort, in welcher Beziehung sie zu dem Dreieck stehen; ihre senkrechten Abstände von den Seitenlinien des Dreiecks sind, abgesehen von den zugehörigen Vorzeichen, einander gleich. Die vier Punkte sind die Centra der sogenannten ein- und angeschriebenen Kreise des Dreiecks. Die Radien dieser Kreise sind

$$\frac{2J}{s_1+s_2+s_3}, \frac{2J}{-s_1+s_2+s_3}, \frac{2J}{s_1-s_2+s_3}, \frac{2J}{s_1+s_2-s_3}$$

und seien durch $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ bezeichnet, es bestehen zwischen ihnen die leicht erfindlichen einfachen Relationen

$$\varrho_0\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = J^2, \quad -\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3 = 4r, \quad \frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3};$$

die beiden letzten sind specielle Fälle der aus der Gleichung 18. sich ergebenden Relation

$$\frac{\overline{E_0A}^2}{\varrho_0} = \frac{\overline{E_1A}^2}{\varrho_1} + \frac{\overline{E_2A}^2}{\varrho_2} + \frac{\overline{E_3A}^2}{\varrho_3}.$$

Die Verbindungslinien der Centra der angeschriebenen Kreise mit den entsprechenden Eckpunkten des Dreiecks gehen durch das Centrum des eingeschriebenen Kreises.

Die Potenzen der Centra der ein- und angeschriebenen Kreise in Bezug auf den umschriebenen Kreis sind

$$\frac{s_1s_2s_3}{s_1+s_2+s_3}, \frac{-s_1s_2s_3}{-s_1+s_2+s_3}, \frac{-s_1s_2s_3}{s_1-s_2+s_3}, \frac{-s_1s_2s_3}{s_1+s_2-s_3}$$

oder also

$$2r\varrho_0, \ -2r\varrho_1, \ -2r\varrho_2, \ -2r\varrho_3,$$

in Bezug auf den Kreis um den Höhenpunkt

$$-2\varrho_0^2,\ -2\varrho_1^2,\ -2\varrho_2^2,\ -2\varrho_3^2$$

und demgemäss in Bezug auf den Feuerbachschen Kreis

$$\varrho_0(r-\varrho_0),\ -\varrho_1(r+\varrho_1),\ -\varrho_2(r+\varrho_2),\ -\varrho_3(r+\varrho_3).$$

Aus diesen letzteren Ausdrücken erkennen wir in Erinnerung an die Bedeutung der Potenz den Satz: der Feuerbachsche Kreis wird von dem eingeschriebenen innen und von den angeschriebenen Kreisen aussen berührt.

Für die Centra der ein- und angeschriebenen Kreise erhält man aus der Gleichung 19. die Gleichungen

$$\overline{E_0A}^2 + 2E_0 + A = \frac{s_2s_3\alpha_1 + s_3s_1\alpha_2 + s_1s_2\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$$

$$\overline{E_1A}^2 + 2E_1 + A = \frac{s_2s_3\alpha_1 - s_3s_1\alpha_2 - s_1s_2\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$$

$$\overline{E_2A}^2 + 2E_2 + A = \frac{-s_2s_3\alpha_1 + s_3s_1\alpha_2 - s_1s_2\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$$

$$\overline{E_3A}^2 + 2E_3 + A = \frac{-s_2s_3\alpha_1 - s_3s_1\alpha_2 + s_1s_2\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$$

und durch Addition derselben die Gleichung

$$\overline{E_0A}^2 + \overline{E_1A}^2 + \overline{E_2A}^2 + \overline{E_3A}^2 + 2(E_0+E_1+E_2+E_3) + 4A = 0$$

oder also, da wegen $-\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3 = 4r$

$$E_0+E_1+E_2+E_3 = -8r^2$$

ist, die Gleichung

$$4A = 16r^2 - (\overline{E_0A}^2 + \overline{E_1A}^2 + \overline{E_2A}^2 + \overline{E_3A}^2).$$

Die vierfache Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis ist demnach gleich dem um die Summe seiner quadratischen Entfernungen von den Centren der ein- und angeschriebenen Kreise eines jeden durch drei Punkte des Kreises bestimmten Dreiecks verminderten sechszehnfachen Quadrate des Radius des Kreises. Die Summe der quadratischen Entfernungen eines jeden Punktes eines Kreises von den Centren der ein- und angeschriebenen Kreise eines jeden durch drei Punkte des Kreises gebildeten Dreiecks ist gleich dem sechszehnfachen Quadrate des Radius des Kreises.

Der letzten Gleichung kann auch, wenn wir durch E den

Schwerpunkt der mit gleichen Coefficienten behafteten Punkte E_0, E_1, E_2, E_3 bezeichnen, die Form

$$A = 4r^2 - \overline{EA}^2$$

oder also die Form

$$\overline{EA}^2 - \overline{AU}^2 = 3r^2$$

gegeben werden; aus derselben und der nunmehrigen Bestimmung des Schwerpunkts E vermittelst der Form 16. ergiebt sich der Satz: Der Schwerpunkt der mit gleichen Coefficienten behafteten Centra der ein- und angeschriebenen Kreise des Dreiecks ist das Centrum des umschriebenen Kreises, und der Radius des Kreises der mittleren quadratischen Entfernungen jener Punkte ist mit der Gleichung

$$\overline{E_0E_1}^2 + \overline{E_1E_2}^2 + \overline{E_2E_3}^2 + \overline{E_3E_0}^2 + \overline{E_0E_2}^2 + \overline{E_1E_3}^2 = 48r^2$$

gegeben. Das Centrum eines Kreises ist der Schwerpunkt der mit gleichen Coefficienten behafteten Centra der ein- und angeschriebenen Kreise eines jeden durch drei Punkte des Kreises bestimmten Dreiecks, und derjenige Kreis, dessen quadratische Entfernung von ihm dreimal so gross ist, als die des gegebenen Kreises, ist der (erste) Kreis der mittleren quadratischen Entfernungen jeder vier also bestimmter Punkte.

Die Centra der ein- und angeschriebenen Kreise sind die vier Durchschnittspunkte der sechs Winkelhalbirungslinien des Dreiecks, und da die Winkelhalbirungslinien eines jeden Eckpunkts zu einander senkrecht sind, so ist jedes Centrum der Höhenpunkt des durch die drei übrigen bestimmten Dreiecks und zu den vier durch die Centra bestimmten Dreiecken gehört als Feuerbachsches Dreieck — wir bezeichnen so der Kürze wegen das durch die Höhenfusspunkte eines Dreiecks gebildete Dreieck — das Dreieck selbst. Daraus folgt: Die Eckpunkte eines Dreiecks und dessen Höhenpunkt sind die Centra der ein- und angeschriebenen Kreise des Feuerbachschen Dreiecks; jeder dieser vier Punkte ist der Höhenpunkt des durch die übrigen bestimmten Dreiecks; das Feuerbachsche Dreieck gehört als solches zu allen vier durch sie bestimmten

Dreiecken, und die diesen umschriebenen Kreise haben deshalb sämmtlich gleiche Radien.

Wir bezeichnen solche Punkte und Grade, deren Coordinaten reciproke Form, als einander in Bezug auf das Dreieck reciprokförmig entsprechend, und in gleicher Weise solche, deren Coordinaten gleiche Form gegeben werden kann, als einander in Bezug auf das Dreieck gleichförmig entsprechend; darnach entsprechen sich z. B. reciprokförmig der Höhenpunkt $(\cot A_2 \cot A_3, \cot A_3 \cot A_1, \cot A_1 \cot A_2)$ und die Grade der gleichen Potenzen $|\cot A_1, \cot A_2, \cot A_3|$. Die Construction der einem Punkte oder einer Graden reciprok- und gleichförmig entsprechenden Punkte und Graden wird weiterhin erhellen aus Sätzen des 27. Abschnitts.

Die Gleichung des umschriebenen Kreises ist, weil die Potenz eines jeden seiner Punkte in Bezug auf ihn Null ist,

$$s_1^2\alpha_2\alpha_3 + s_2^2\alpha_3\alpha_1 + s_3^2\alpha_1\alpha_2 = 0;$$

es gilt daher für alle Punkte des Kreises mit Ausnahme der Eckpunkte des Dreiecks die Gleichung

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1} + \frac{s_2^2}{\alpha_2} + \frac{s_3^2}{\alpha_3} = 0$$

und folglich der Satz: Die den Punkten des einem Dreieck umschriebenen Kreises mit Ausnahme der Eckpunkte des Dreiecks in Bezug auf dieses reciprokförmig entsprechenden Graden gehen durch einen Punkt und reciprokförmig entsprechenden Punkte liegen auf einer Graden; dieser Punkt und diese Grade entsprechen sich gleichförmig, ihre Formen sind

$$(s_1^2, s_2^2, s_3^2), \ |s_1^2, s_2^2, s_3^2|.$$

Die Summe der mit den Constanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ multiplicirten Quadrate der Flächeninhalte der durch den Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit den Eckpunkten des Dreiecks gebildeten Dreiecke ist

$$\frac{J^2(\varkappa_1\alpha_1^2 + \varkappa_2\alpha_2^2 + \varkappa_3\alpha_3^2)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2}.$$

Wir schliessen daraus, wie in der That in bekannter Weise als richtig sich erweist: Der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ hat vor allen andern Punkten die Eigenschaft, dass für ihn die Summe der mit den Constanten $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_3}$ multipli-

cirten Quadrate der Flächeninhalte der mit den Eckpunkten gebildeten Dreiecke oder dass für ihn die Summe der mit den Constanten $\frac{s_1^2}{\alpha_1}, \frac{s_2^2}{\alpha_2}, \frac{s_3^2}{\alpha_3}$ multiplicirten senkrechten Quadratabstände von den Seitenlinien ein Minimum ist. Insbesondere ist daher der Schwerpunkt (1, 1, 1) derjenige Punkt, für den die Summe der Quadrate der Flächeninhalte der mit den Eckpunkten gebildeten Dreiecke, und der Punkt (s_1^2, s_2^2, s_3^2) derjenige Punkt, für den die Summe der senkrechten Quadratabstände von den Seitenlinien ein Minimum ist. Diese Punkte entsprechen sich hiernach gewissermassen; dasselbe gilt auf Grund des angegebenen Satzes von jeden zwei Pnnkten, deren Coordinaten, beziehungsweise mit einander multiplicirt, den Grössen s_1^2, s_2^2, s_3^2 proportionale Producte ergeben, die also durch die Formen $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $\left(\frac{s_1^2}{\alpha_1}, \frac{s_2^2}{\alpha_2}, \frac{s_3^2}{\alpha_3}\right)$ gegeben werden können; wir nennen sie einander in Bezug auf das Dreieck isogonal entsprechende Punkte auf Grund des ihre gegenseitige Lage beleuchtenden Satzes: Die drei Graden der Eckpunkte des Dreiecks, die so gelegen sind, dass in Bezug auf sie und die drei durch den Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ gehenden Graden der Eckpunkte beziehungsweise die Winkelhalbirungslinien des Dreiecks Winkelhalbirungslinien sind, gehen durch den Punkt $\left(\frac{s_1^2}{\alpha_1}, \frac{s_2^2}{\alpha_2}, \frac{s_3^2}{\alpha_3}\right)$, eines Satzes, der sofort aus der Formel 3. des 7. Abschnitts erhellt, wenn man die Verbindungslinien der Punkte (s_1, s_2, s_3), $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\left(\frac{s_1^2}{\alpha_1}, \frac{s_2^2}{\alpha_2}, \frac{s_3^2}{\alpha_3}\right)$ z. B. mit dem Punkte (1, 0, 0) in der Form $|s_3, -s_2|$, $|\alpha_3, -\alpha_2|$, $\left|\frac{s_3^2}{\alpha_3}, -\frac{s_2^2}{\alpha_2}\right|$ darstellt. Einander isogonal entsprechende Punkte sind z. B. der Höhenpunkt und das Centrum des umschriebenen Kreises; die Centra der ein- und angeschriebenen Kreise entsprechen isogonal sich selbst; den Punkten des umschriebenen Kreises entsprechen mit Ausnahme der Eckpunkte des Dreiecks isogonal die unendlich fernen Punkte. Die in analoger Weise einander isogonal entsprechenden Graden

sind durch die Formen $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|$ und $\left|\frac{\sigma_1^2}{a_1}, \frac{\sigma_2^2}{a_2}, \frac{\sigma_3^2}{a_3}\right|$ darstellbar.

In naher Beziehung zu dem Punkte (s_1^2, s_2^2, s_3^2) — oder M_0 — stehen besonders die Punkte

$$(-s_1^2, s_2^2, s_3^2), (s_1^2, -s_2^2, s_3^2), (s_1^2, s_2^2, -s_3^2),$$

die wir M_1, M_2, M_3 heissen. Aus den für sie geltenden Gleichungen

$$\overline{M_1A}^2 + M_1 + A = \frac{2s_2^2s_3^2\alpha_1}{(-s_1^2+s_2^2+s_3^2)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$$

$$\overline{M_2A}^2 + M_2 + A = \frac{2s_3^2s_1^2\alpha_2}{(s_1^2-s_2^2+s_3^2)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$$

$$\overline{M_3A}^2 + M_3 + A = \frac{2s_1^2s_2^2\alpha_3}{(s_1^2+s_2^2-s_3^2)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$$

ergiebt sich $M_1 = -\overline{M_1A_2}^2 = -\overline{M_1A_3}^2$, u. s. f. und damit, dass die Punkte M_1, M_2, M_3 die Durchschnittspunkte der durch die Eckpunkte des Dreiecks gehenden Graden (Tangenten) des umschriebenen Kreises sind; ihre Verbindungslinien mit den gegenüberliegenden Eckpunkten gehen durch den Punkt M_0.

Die Punkte M_1, M_2, M_3 sind die Centra dreier Kreise, die einander in den Eckpunkten des Dreiecks berühren, und also die Centra dreier Kreise, die einander und deren jeder zwei Seitenlinien eines bestimmten Dreiecks berühren, die Centra der drei sogenannten Malfattischen Kreise eines bestimmten Dreiecks.

Zu allen vier Punkten M_0, M_1, M_2, M_3 gelangt man in einfacher Weise durch den folgenden leicht beweisbaren Satz: Trägt man auf den durch einen Eckpunkt des Dreiecks gehenden Seitenlinien vom Eckpunkte aus nach beiden Seiten hin wechselseitig die auf ihnen liegenden Seiten des Dreiecks ab, zieht durch die dadurch erhaltenen Punkte zu denselben Seitenlinien parallele Grade und verbindet deren Durchschnittspunkte mit einander durch Grade, so gehen die so erhaltenen zwei Graden durch jenen Eckpunkt, und die sämmtlichen in dieser Weise bestimmten sechs Graden der drei Eckpunkte gehen zu dreien durch die Punkte M_0, M_1, M_2, M_3.

Zum Schluss bemerken wir mit einem Hinweis auf die

Formeln $3s_1^2 + 3\sigma_1^2 = 4s_1^2 + 8J \cot A_1 = 4\sigma_1^2 + 8J \cot \mathcal{A}_1 = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$, u. s. f. und die Formel 9. des 8. Abschnitts, dass die Punkte

$$(s_1^2, s_2^2, s_3^2), (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$$
$$(\cot A_1, \cot A_2, \cot A_3), (\cot \mathcal{A}_1, \cot \mathcal{A}_2, \cot \mathcal{A}_3)$$

sämmtlich auf einer Graden des Schwerpunkts liegen, und zwar so, dass dieser, zwischen den Punkten (s_1^2, s_2^2, s_3^2), $(\cot \mathcal{A}_1, \cot \mathcal{A}_2, \cot \mathcal{A}_3)$ und den Punkten $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$, $(\cot A_1, \cot A_2, \cot A_3)$ gelegen, von den Punkten (s_1^2, s_2^2, s_3^2), $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$ und den Punkten $(\cot A_1, \cot A_2, \cot A_3)$, $(\cot \mathcal{A}_1, \cot \mathcal{A}_2, \cot \mathcal{A}_3)$ gleich weit und von den Punkten (s_1^2, s_2^2, s_3^2), $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$ halbmal so weit entfernt ist, als beziehungsweise von den Punkten $(\cot A_1, \cot A_2, \cot A_3)$, $(\cot \mathcal{A}_1, \cot \mathcal{A}_2, \cot \mathcal{A}_3)$. Von dem Höhenpunkte $(\cot A_2 \cot A_3, \cot A_3 \cot A_1, \cot A_1 \cot A_2)$ kann man hiernach durch Construction vermittelst des ihm reciprokförmig entsprechenden Punktes $(\cot A_1, \cot A_2, \cot A_3)$, des Schwerpunkts und des Punktes $(\cot \mathcal{A}_1, \cot \mathcal{A}_2, \cot \mathcal{A}_3)$ zu der diesem Punkte reciprokförmig, dem Höhenpunkte dualistisch entsprechenden Graden $|\cot \mathcal{A}_2 \cot \mathcal{A}_3, \cot \mathcal{A}_3 \cot \mathcal{A}_1, \cot \mathcal{A}_1 \cot \mathcal{A}_2|$, und in umgekehrter Weise von dieser Graden zu jenem Punkte gelangen.

19. Bezeichnen m_1, m_2, m_3 die barycentrischen Coordinaten des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und μ_1, μ_2, μ_3 die der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ in Bezug auf das im 14. Abschnitte durch die Coordinaten seiner Eckpunkte und Seitenlinien gekennzeichnete Dreieck, so haben die im Eingang des 15. Abschnitts gegebenen und die diesen entsprechenden Gleichungen statt; sie nehmen eine elegantere Form an, wenn man für $\frac{\Delta m_1}{\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}}$, $\frac{\Delta m_2}{\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}}$, $\frac{\Delta m_3}{\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33}}$; $\frac{\Delta \mu_1}{a_{11} + a_{12} + a_{13}}$, $\frac{\Delta \mu_2}{a_{21} + a_{22} + a_{23}}$, $\frac{\Delta \mu_3}{a_{31} + a_{32} + a_{33}}$ in ihnen a'_1, a'_2, a'_3; $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ oder $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$; a'_1, a'_2, a'_3 setzt, und lauten dann

$$\Delta a'_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3, \quad \Delta \alpha'_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \alpha_{13}a_3$$
$$\Delta a'_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3, \quad \Delta \alpha'_2 = \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{23}a_3$$
$$\Delta a'_3 = a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3, \quad \Delta \alpha'_3 = \alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3$$

$$\Delta\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_{11}\alpha'_1+\mathfrak{a}_{21}\alpha'_2+\mathfrak{a}_{31}\alpha'_3,\ \Delta\alpha_1=\alpha_{11}\mathfrak{a}'_1+\alpha_{21}\mathfrak{a}'_2+\alpha_{31}\mathfrak{a}'_3$$
$$\Delta\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}_{12}\alpha'_1+\mathfrak{a}_{22}\alpha'_2+\mathfrak{a}_{32}\alpha'_3,\ \Delta\alpha_2=\alpha_{12}\mathfrak{a}'_1+\alpha_{22}\mathfrak{a}'_2+\alpha_{32}\mathfrak{a}'_3$$
$$\Delta\mathfrak{a}_3=\mathfrak{a}_{13}\alpha'_1+\mathfrak{a}_{23}\alpha'_2+\mathfrak{a}_{33}\alpha'_3,\ \Delta\alpha_3=\alpha_{13}\mathfrak{a}'_1+\alpha_{23}\mathfrak{a}'_2+\alpha_{33}\mathfrak{a}'_3$$

oder beziehungsweise

$$\Delta\alpha'_1=\mathfrak{a}_{11}\alpha_1+\mathfrak{a}_{12}\alpha_2+\mathfrak{a}_{13}\alpha_3,\ \Delta\mathfrak{a}'_1=\alpha_{11}\mathfrak{a}_1+\alpha_{12}\mathfrak{a}_2+\alpha_{13}\mathfrak{a}_3$$
$$\Delta\alpha'_2=\mathfrak{a}_{21}\alpha_1+\mathfrak{a}_{22}\alpha_2+\mathfrak{a}_{23}\alpha_3,\ \Delta\mathfrak{a}'_2=\alpha_{21}\mathfrak{a}_1+\alpha_{22}\mathfrak{a}_2+\alpha_{23}\mathfrak{a}_3$$
$$\Delta\alpha'_3=\mathfrak{a}_{31}\alpha_1+\mathfrak{a}_{32}\alpha_2+\mathfrak{a}_{33}\alpha_3,\ \Delta\mathfrak{a}'_3=\alpha_{31}\mathfrak{a}_1+\alpha_{32}\mathfrak{a}_2+\alpha_{33}\mathfrak{a}_3$$

$$\Delta\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}'_1+\mathfrak{a}_{21}\mathfrak{a}'_2+\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{a}'_3,\ \Delta\alpha_1=\alpha_{11}\alpha'_1+\alpha_{21}\alpha'_2+\alpha_{31}\alpha'_3$$
$$\Delta\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}'_1+\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}'_2+\mathfrak{a}_{32}\mathfrak{a}'_3,\ \Delta\alpha_2=\alpha_{12}\alpha'_1+\alpha_{22}\alpha'_2+\alpha_{32}\alpha'_3$$
$$\Delta\mathfrak{a}_3=\mathfrak{a}_{13}\mathfrak{a}'_1+\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{a}'_2+\mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}'_3,\ \Delta\alpha_3=\alpha_{13}\alpha'_1+\alpha_{23}\alpha'_2+\alpha_{33}\alpha'_3.$$

Die Form dieser Gleichungen legt es nun nahe, die Grössen α'_1, α'_2, α'_3 und $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{a}'_3$ als die Coordinaten eines Punktes und einer Graden aufzufassen; es sind alsdann durch sie Punkte und Grade zu einander in Beziehung gesetzt oder die Abhängigkeit zweier Systeme von Punkten und Graden in Bezug auf ein Dreieck gegeben.

Die vier ersten Gruppen von Gleichungen weisen auf ein Entsprechen von Punkten mit Graden und von Graden mit Punkten, eine Beziehung, die als R e c i p r o c i t ä t bezeichnet wird. Jedem Punkte des einen Systems entspricht eine Grade des andern und jeder Graden des einen ein Punkt des andern; der Uebergang von dem ersten zum zweiten Systeme wird durch die zwei ersten und der Uebergang von dem zweiten zum ersten durch die zwei letzten jener vier Gruppen vermittelt. Die Punkte liegen auf den ihnen entsprechenden Graden und die Graden gehen durch die ihnen entsprechenden Punkte im Allgemeinen nicht; alle Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, mögen sie dem einen oder dem andern Systeme angehören, die auf den ihnen entsprechenden Graden liegen, sind Punkte des Kegelschnitts

$$\mathfrak{a}_{11}\alpha_1^2+\mathfrak{a}_{22}\alpha_2^2+\mathfrak{a}_{33}\alpha_3^2+(\mathfrak{a}_{23}+\mathfrak{a}_{32})\,\alpha_2\alpha_3$$
$$+(\mathfrak{a}_{31}+\mathfrak{a}_{13})\,\alpha_3\alpha_1+(\mathfrak{a}_{12}+\mathfrak{a}_{21})\,\alpha_1\alpha_2=0$$

und alle Graden $|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3|$, mögen sie dem einen oder dem andern Systeme angehören, die durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, Grade des Kegelschnitts

$$\alpha_{11}\mathfrak{a}_1^2+\alpha_{22}\mathfrak{a}_2^2+\alpha_{33}\mathfrak{a}_3^2+(\alpha_{23}+\alpha_{32})\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$$
$$+(\alpha_{31}+\alpha_{13})\,\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1+(\alpha_{12}+\alpha_{21})\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2=0,$$

denn die erste dieser Gleichungen kann in der Form $(\mathfrak{a}_{11}\alpha_1 + \mathfrak{a}_{12}\alpha_2 + \mathfrak{a}_{13}\alpha_3)\,\alpha_1 + \cdots = 0$ und $(\mathfrak{a}_{11}\alpha_1 + \mathfrak{a}_{21}\alpha_2$

$+ a_{31}\alpha_3)\,\alpha_1 + \cdots = 0$ und in analoger Weise auch die zweite dargestellt werden.

Im Allgemeinen entspricht dem einer Graden entsprechenden Punkte diese Grade und der einem Punkte entsprechenden Graden dieser Punkt nicht; nur wenn die Indices der Grössen a und α — das eine zieht das andere nach sich — mit einander vertauscht werden können, ohne dass der Werth dieser Grössen dadurch geändert wird, nur dann findet dieses wechselseitige Entsprechen statt: jedem Punkte entspricht eine Grade und dieser Graden jener Punkt, und jeder Graden entspricht ein Punkt und diesem Punkte jene Grade. Dieses durch die zwei ersten oder die zwei letzten der vier ersten Gruppen, in denen alsdann die Strichelchen wegfallen, characterisirte Entsprechen wird, eine specielle Art der Reciprocität, als Polarreciprocität bezeichnet. Die Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, die auf den ihnen entsprechenden Graden liegen, und die Graden $|a_1, a_2, a_3|$, die durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, sind Punkte und Grade eines Kegelschnitts, des in Punktcoordinaten durch die Gleichung

$$a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 + 2a_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0$$

und in Liniencoordinaten durch die Gleichung

$$\alpha_{11}a_1^2 + \alpha_{22}a_2^2 + \alpha_{33}a_3^2 + 2\alpha_{23}a_2a_3 + 2\alpha_{31}a_3a_1 + 2\alpha_{12}a_1a_2 = 0$$

dargestellten Kegelschnitts, da beide Gleichungen in der gemeinschaftlichen Form

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$$

darstellbar sind. Die einem Punkte entsprechende Grade wird die Polare des Punktes und der einer Graden entsprechende Punkt der Pol der Graden in Bezug auf diesen Kegelschnitt genannt.

Durch die vier letzten Gruppen dagegen wird ein Entsprechen von Punkten mit Punkten und von Graden mit Graden vermittelt. Jedem Punkte des einen Systems entspricht ein Punkt des andern und jeder Graden des einen eine Grade des andern; der Uebergang von dem ersten zum zweiten Systeme geschieht vermittelst der zwei ersten und der Uebergang von dem zweiten zum ersten vermittelst der zwei letzten jener vier

Gruppen. Den Graden eines Punktes entsprechen die Graden des ihm entsprechenden Punktes und den Punkten einer Graden die Punkte der ihr entsprechenden Graden. Diese Beziehung zwischen Punkten und Graden wird als **Collinearverwandtschaft** bezeichnet.

Die vier letzten Gruppen sind aber noch in einer andern Beziehung von Bedeutung, indem sie nämlich zur Beantwortung der Frage nach den die in Bezug auf zwei Dreiecke als Fundamentaldreiecke gegebenen Coordinaten eines Punktes und einer Graden verbindenden Relationen oder zur Erledigung der sogenannten **Coordinatentransformation** führen. Die Grössen α'_1, α'_2, α'_3 und a'_1, a'_2, a'_3 sind die Coordinaten des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ in Bezug auf das durch die Punkte

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}), (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$$

und die Graden

$$|a_{11}, a_{12}, a_{13}|, |a_{21}, a_{22}, a_{23}|, |a_{31}, a_{32}, a_{33}|$$

gegebene Dreieck, wenn dieses als Fundamentaldreieck aufgefasst wird, und die vier letzten Gruppen von Gleichungen geben den Zusammenhang zwischen den in Bezug auf das Fundamentaldreieck und den in Bezug auf dieses auch als Fundamentaldreieck aufgefasste, durch die Coordinaten seiner Eckpunkte und Seitenlinien gegebene Dreieck genommenen Coordinaten eines Punktes und einer Graden, sofern, was stets bewirkt werden kann, die Coordinaten der Eckpunkte dieses Dreiecks der Relation

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} = \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33}$$

oder die Coordinaten seiner Seitenlinien der Relation

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33}$$

— die eine zieht die andere nach sich — genügen. Denn unter dieser Bedingung, das brauchen wir zur Bestätigung dessen nur anzuführen, sind die Grössen α'_1, α'_2, α'_3 proportional den barycentrischen Coordinaten des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ in Bezug auf das in Rede stehende Dreieck und also, wie aus dem Umstande, dass die Coordinaten eines Punktes seine barycentrischen Coordinaten in Bezug auf das Fundamentaldreieck sind, geschlossen werden muss, die Coordinaten des Punktes in Bezug auf jenes Dreieck, wofern ein Punkt, der der Schwerpunkt von

Punkten ist, bei einer Lagenveränderung des Fundamentaldreiecks es auch bleibt, was in der That der Fall ist, weil der Schwerpunkt von der Lage der unendlich fernen Graden abhängig ist und diese, da es für uns in der Ebene nur eine einzige unendlich ferne Grade giebt, bei einer Lagenveränderung des Fundamentaldreiecks sich nicht ändert. Uebrigens erkennt man leicht, dass ohne die obige einschränkende Relation der Zusammenhang zwischen den beiden Coordinatensystemen durch dieselben Gleichungen gegeben ist, wenn in ihnen α'_1, α'_2, α'_3 durch $\frac{\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}}{\Delta}$, $\frac{\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}}{\Delta}$, $\frac{\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33}}{\Delta}$ dividirt und a'_1, a'_2, a'_3 mit denselben Grössen multplicirt gedacht wird.

Beachtenswerth ist an dieser Stelle die Bemerkung, dass eine Grade, die die Schwerlinie von Graden ist, bei einer Lagenveränderung des Fundamentaldreiecks es im Allgemeinen nicht bleibt, weil die Schwerlinie von der Lage des endlich fernen Punktes abhängig ist und diese sich bei einer Lagenveränderung des Fundamentaldreiecks im Allgemeinen ändert. Die unendlich ferne Grade ist eine feste Grade, der endlich ferne Punkt ein willkürlicher Punkt; dies ist das Einzige, das in gewisser Beziehung die Dualität zwischen Punkt und Grade stört, und begründet in der Natur dieser Elementargebilde: der Punkt hat keine, die Grade eine Ausdehnung.

20. Nach der Formel 8. des 8. Abschnitts besteht zwischen den Entfernungen des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ oder A von dem Punkte $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ oder A′ und dem Punkte $(\varkappa, \varkappa')$ oder B die Relation

$$\varkappa' (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3) \,.\, AA' = (\varkappa (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \varkappa' (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3))\, AB$$

und also zwischen den Entfernungen des Punktes A von dem Punkte A′ und dem Durchschnittspunkte B der Verbindungslinie dieser Punkte und der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ die Relation

$$\frac{AA'}{AB} = - \frac{a_1\alpha'_1 + a_2\alpha'_2 + a_3\alpha'_3}{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3} \cdot \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3} + 1.$$

Bedeuten daher μ'_1, μ'_2, - - constante Grössen, A_1, A_2, - - die

Durchschnittspunkte irgend einer beliebigen, sagen wir, durch den beliebigen Punkt $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ gehenden Graden des Punktes A_0 oder $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und der Graden $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, -- oder $|a_{11}, a_{12}, a_{13}|, |a_{21}, a_{22}, a_{23}|$, -- und A den Durchschnittspunkt derselben Graden und der Graden $\mathcal{A}$ oder

$$\left| \frac{\mu'_1 a_{11}}{a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3} + \frac{\mu'_2 a_{21}}{a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3} + --, \right.$$
$$\frac{\mu'_1 a_{12}}{a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3} + \frac{\mu'_2 a_{22}}{a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3} + --,$$
$$\left. \frac{\mu'_1 a_{13}}{a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3} + \frac{\mu'_2 a_{23}}{a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3} + -- \right|,$$

so hat offenbar die Gleichung

$$\frac{\mu'_1}{A_0A_1} + \frac{\mu'_2}{A_0A_2} + -- = \frac{\mu'_1 + \mu'_2 + --}{A_0A}$$

statt. Die Summe der mit den Coefficienten μ'_1, μ'_2, -- versehenen reciproken Entfernungen des Punktes A_0 von den auf den Graden $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, -- durch eine jede Grade desselben bestimmten Punkten ist also gleich der mit dem Coefficienten $\mu'_1 + \mu'_2 + --$ versehenen reciproken Entfernung des Punktes von dem durch dieselbe Grade auf der nur von der Lage des Punktes und der Graden und den Coefficienten abhängigen Graden $\mathcal{A}$ bestimmten Punkte. Wir nennen diese Grade $\mathcal{A}$ die Centrale der mittleren reciproken Entfernungen des Punktes A_0 von den Graden $\mu'_1 . \mathcal{A}_1, \mu'_2 . \mathcal{A}_2$, --. Sie ist die Schwerlinie der Graden $\mu_1 . \mathcal{A}_1, \mu_2 . \mathcal{A}_2$, --, wenn die Verhältnisse $\mu'_1 : \mu_1$, $\mu'_2 : \mu_2$, -- proportional sind den Parallelabständen der Graden $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, -- von dem Punkte A_0 in Bezug auf jeden beliebigen Punkt. Insbesondere ist die Centrale der mittleren reciproken Entfernungen des endlich fernen Punktes von den Graden $\mu_1 . \mathcal{A}_1, \mu_2 . \mathcal{A}_2$, -- die Schwerlinie dieser Graden.

Im Allgemeinen kann natürlich jede Grade als Centrale der mittleren reciproken Entfernungen eines Punktes von gegebenen Graden angesehen werden, wenn diesen geeignete Coefficienten beigelegt werden. So ist die Grade $|a_1, a_2, a_3|$ die Centrale der mittleren reciproken Entfernungen des Punktes

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ von den Fundamentallinien, wenn, und nur dann, wenn diesen die Coefficienten $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, $a_3\alpha_3$ beigelegt werden, und es gilt darnach für sie die Gleichung

$$\frac{a_1\alpha_1}{A_0A_1} + \frac{a_2\alpha_2}{A_0A_2} + \frac{a_3\alpha_3}{A_0A_3} = \frac{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3}{A_0A}.$$

21. Der Flächeninhalt des durch die Punkte

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}), (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$$

und die Graden

$$|a_{11}, a_{12}, a_{13}|, |a_{21}, a_{22}, a_{23}|, |a_{31}, a_{32}, a_{33}|$$

bestimmten (realen) Dreiecks wird in von selbst erhellender Weise gefunden als gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{-\Delta^3 J}{(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})(\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})(\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})},$$

in dem, falls man den absoluten Flächeninhalt haben will, der Determinante $-\Delta^3$ noch das Vorzeichen des Nenners vorzusetzen ist. Und das wird stets zu geschehen haben, wenn man es nur mit einer Dreiecksfläche zu thun hat, weil es sich dann nur um die absolute Grösse derselben handeln kann. Kommen aber mehrere Dreiecksflächen in Betracht, so müssen ihnen Vorzeichen beigelegt werden. Wir bezeichnen dazu die drei Punkte durch A_1, A_2, A_3 und die durch sie in dieser Reihenfolge bestimmte Dreiecksfläche mit Rücksicht auf das Vorzeichen durch $A_1A_2A_3$, setzen

$$A_1A_2A_3 = \frac{-\Delta^3 J}{(\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13})(\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23})(\alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{33})}$$

und behaupten: *Die Dreiecksfläche $A_1A_2A_3$ ist positiv oder negativ, je nachdem die Grade A_1A_3 durch Drehung in der im 5. Abschnitte bestimmten Richtung um den Punkt A_1 bis zur Deckung mit der Graden A_1A_2 den Dreieckswinkel A_1 überstreicht, oder nicht.*

Die Richtigkeit dieser Behauptung, nach der die Dreiecksflächen

$$A_1A_2A_3, A_2A_3A_1, A_3A_1A_2$$

und ebenso die Dreiecksflächen

$$A_1A_3A_2, A_2A_1A_3, A_3A_2A_1$$

auch hinsichtlich des Vorzeichens einander gleich, hingegen

aber die drei ersten den drei letzten entgegengesetzt gleich sind, erhellt unmittelbar aus einer Gleichung, die sich ergiebt, wenn man bemerkt, dass nach der Formel 7. des 8. Abschnitts

$$(\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})^2 (\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})^2 . \overline{A_2A_3}^2$$
$$= \varDelta^2 (s_1^2 a_{11}^2 + \text{- - -} - 2s_2 s_3 \cos A_1 a_{12} a_{13} - \text{- -})$$
$$(\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})^2 (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})^2 . \overline{A_3A_1}^2$$
$$= \varDelta^2 (s_1^2 a_{21}^2 + \text{- - -} - 2s_2 s_3 \cos A_1 a_{22} a_{23} - \text{- -})$$
$$(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})^2 (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})^2 . \overline{A_1A_2}^2$$
$$= \varDelta^2 (s_1^2 a_{31}^2 + \text{- - -} - 2s_2 s_3 \cos A_1 a_{32} a_{33} - \text{- -})$$

und somit, da die Relationen

$$a_{21}^2 (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})^2 + a_{31}^2 (\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})^2$$
$$- a_{11}^2 (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})^2 =$$
$$- 2a_{21} a_{31} (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})(\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})$$
$$+ \varDelta^4 - 2\varDelta^2 a_{11} (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})$$
$$a_{22} a_{23} (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})^2 + a_{32} a_{33} (\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})^2$$
$$- a_{12} a_{13} (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})^2 =$$
$$- (a_{22} a_{33} + a_{23} a_{32})(\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})(\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})$$
$$+ \varDelta^4 - \varDelta^2 (a_{12} + a_{13})(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})$$

u. s. f. bestehen,

$$A_3A_1 . A_1A_2 \cos A_1 =$$
$$- \varDelta^2 . \frac{s_1^2 a_{21} a_{31} + \text{- - -} - s_2 s_3 \cos A_1 (a_{22} a_{33} + a_{23} a_{32}) - \text{- -}}{(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})^2 (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})(\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})},$$

andererseits aber, wenn der von den Graden A_1A_3 und A_1A_2 gebildete Winkel durch A'_1 bezeichnet wird,

$$\cos A'_1 = \frac{s_1^2 a_{21} a_{31} + \text{- - -} - s_2 s_3 \cos A_1 (a_{22} a_{23} + a_{23} a_{32}) - \text{- -}}{\sqrt[2]{(s_1^2 a_{21}^2 + \text{- - -} - 2s_2 s_3 \cos A_1 a_{22} a_{33} - \text{- -})(s_1^2 a_{31}^2 + \text{- -} - 2s_2 s_3 \cos A_1 a_{32} a_{33} - \text{- -})}}$$

$$A_3A_1 . A_1A_2 = - \frac{\varDelta^2 \sqrt[2]{(s_1^2 a_{21}^2 + \text{- - -} - 2s_2 s_3 \cos A_1 a_{22} a_{33} - \text{- -})(s_1^2 a_{31}^2 + \text{- - -} - 2s_2 s_3 \cos A_1 a_{32} a_{33} - \text{- -})}}{(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})^2 (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})(\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})}$$

— den Quadratwurzeln sind hierin die Vorzeichen der Grössen $\varDelta (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})$ und $(\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})(\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})$ beizulegen — und folglich, wenn ε das Vorzeichen der Grösse $- \varDelta (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})(\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})(\alpha_{31} + \alpha_{32}$

$+\alpha_{33}$) oder also das Vorzeichen der Dreiecksfläche $A_1A_2A_3$ bedeutet,

$$\varepsilon A_3A_1 \,.\, A_1A_2 \cos A'_1 =$$
$$-\Delta^2 \,.\, \frac{s_1^2 a_{21} a_{31} + \cdots - s_2 s_3 \cos A_1 (a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32}) - \cdots}{(\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13})^2 (\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23})(\alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{33})}$$

ist, und also lautet:

$$\cos A_1 = \varepsilon \cos A'_1.$$

Für vier Punkte A, A_1, A_2, A_3 besteht darnach die Relation

$$A_1A_2A_3 + A_2AA_3 + A_3AA_1 + A_1AA_2 = 0$$

oder

$$A_1A_2A_3 = AA_2A_3 + AA_3A_1 + AA_1A_2.$$

Sind insbesondere A_1, A_2, A_3 die Fundamentalpunkte und der Punkt A gegeben durch die Form (α_1, α_2, α_3), so ist

$$AA_2A_3 = \alpha_1,\quad AA_3A_1 = \alpha_2,\quad AA_1A_2 = \alpha_3$$
$$A_1A_2A_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3;$$

man kann demgemäss nach dem 16. Abschnitte die den am Ende des 13. gegebenen entsprechenden Gleichungen

$$A_1A_2A_3 \,.\, AA' + A_2AA_3 \,.\, A_1A'_1 + A_3AA_1 \,.\, A_2A'_2 + A_1AA_2 \,.\, A_3A_3 = 0$$

$$A_1A_2A_3 \,.\, \overline{AA_0}^2 + A_2AA_3 \,.\, \overline{A_1A_0}^2 + A_3AA_1 \,.\, \overline{A_2A_0}^2 + A_1AA_2 \,.\, \overline{A_3A_0}^2 = 0$$

$$A_1A_2A_3 \,.\, \overline{AA_0}^2 + A_2AA_3 \,.\, \overline{A_1A_0}^2 + A_3AA_1 \,.\, \overline{A_2A_0}^2 + A_1AA_2 \,.\, \overline{A_3A_0}^2 + A_1A_2A_3 \,.\, A = 0$$

$$A = \pm \overline{AA}^2 = \frac{A_3AA_1 \,.\, A_1AA_2 \,.\, \overline{A_2A_3}^2 + A_1AA_2 \,.\, A_2AA_3 \,.\, \overline{A_3A_1}^2 + A_2AA_3 \,.\, A_3AA_1 \,.\, \overline{A_1A_2}^2}{\overline{A_1A_2A_3}^2}$$

aufstellen; für den Fall, dass der Punkt A auf dem durch die Punkte A_1, A_2, A_3 gehenden Kreise liegt, ergiebt sich aus ihnen, weil dann in Folge des Satzes von der Gleichheit der Peripheriewinkel die Dreiecksflächen

$$A_1A_2A_3,\quad A_2AA_3,\quad A_3AA_1,\quad A_1AA_2,$$

absolut genommen, den Grössen

$$A_2A_3 \,.\, A_3A_1 \,.\, A_1A_2,\quad A_2A_3 \,.\, A_3A \,.\, AA_2,\quad AA_3 \,.\, A_3A_1 \,.\, A_1A,\quad A_2A \,.\, AA_1 \,.\, A_1A_2$$

proportional sind, der folgende Satz: Zwischen vier Punkten eines Kreises A, A_1, A_2, A_3 bestehen die Relationen

$$A_2A_3 \,.\, A_3A_1 \,.\, A_1A_2 \,.\, AA' + A_2A_3 \,.\, A_3A \,.\, AA_2 \,.\, A_1A'_1$$
$$+ AA_3 \,.\, A_3A_1 \,.\, A_1A \,.\, A_2A'_2 + A_2A \,.\, AA_1 \,.\, A_1A_2 \,.\, A_3A'_3 = 0$$

$$A_2A_3 \,.\, A_3A_1 \,.\, A_1A_2 \,.\, \overline{AA_0}^2 + A_2A_3 \,.\, A_3A \,.\, AA_2 \,.\, \overline{A_1A_0}^2$$
$$+ AA_3 \,.\, A_3A_1 \,.\, A_1A \,.\, \overline{A_2A_0}^2 + A_2A \,.\, AA_1 \,.\, A_1A_2 \,.\, \overline{A_3A_0}^2 = 0,$$

vorausgesetzt, dass den in ihnen als Coefficienten auftretenden Producten die Vorzeichen der Dreiecksflächen $A_1A_2A_3$, A_2AA_3, A_3AA_1, A_1AA_2 beigelegt werden. Die zweite Relation enthält als speciellen Fall — die Annahme des beliebigen Punktes A_0 als zusammenfallend mit dem Punkte A führt auf ihn — den Ptolemäischen Satz: Zwischen vier Punkten eines Kreises A, A_1, A_2, A_3 besteht die Relation

$$AA_1 \,.\, A_2A_3 + AA_2 \,.\, A_3A_1 + AA_3 \,.\, A_1A_2 = 0,$$

vorausgesetzt, dass den Producten die Vorzeichen der Dreiecke A_2AA_3, A_3AA_1, A_1AA_2 beigelegt werden.

Den entsprechenden Ausdruck

$$\frac{-\Delta^3 J}{(a_{11}+a_{12}+a_{13})\,(a_{21}+a_{22}+a_{23})\,(a_{31}+a_{32}+a_{33})}$$

bezeichnen wir als den Flächeninhalt des durch jene Punkte und jene Graden bestimmten idealen Dreiecks.

Durch drei Punkte oder drei Grade werden ein reales Dreieck und ein ideales Dreieck oder vielmehr unendlich viele ideale Dreiecke bestimmt, da das ideale Dreieck von der Lage des endlich fernen Punktes des Coordinatensystems abhängig ist. Das reale Dreieck ist von der Lage der festen unendlich fernen Graden abhängig; aus diesem Grunde gelten alle Sätze, die als für das (reale) Fundamentaldreieck bestehend nachgewiesen werden, zugleich auch für jedes beliebige Dreieck, und dem Prinzip der Dualität gemäss die entsprechenden Sätze für alle idealen Dreiecke. Man kann die Eigenschaften eines Dreiecks scheiden in Eigenschaften des realen Dreiecks und in Eigenschaften der idealen Dreiecke, und es empfiehlt sich, die beim Dreieck vorkommenden üblichen Bezeichnungen auf das ideale Dreieck zu übertragen. Die am Ende des 11. Abschnitts gegebenen Sätze z. B. kann man dann darstellen in der kürzeren — wir geben sie zugleich auch in der zulässigen allgemeineren — Fassung:

Die Höhenlinien des realen Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Die Höhenpunkte der idealen Dreiecke liegen auf je einer Graden.

Die Grössen σ_1, σ_2, σ_3, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ sind als die Seiten und Winkel eines durch die Fundamentalpunkte und -linien bestimmten idealen Fundamentaldreiecks anzusehen.

Drittes Kapitel.

Das Doppelverhältniss. Merkwürdige Punkte der Graden.

---

22. Werden durch A, A′, B, C die vier Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$, $(\varkappa, \varkappa')$, (λ, λ') bezeichnet, so beseht, wie aus der Gleichung 10. des 8. Abschnitts unmittelbar hervorgeht, die Gleichung

$$\frac{AB}{A'B} : \frac{AC}{A'C} = \frac{\lambda}{\lambda'} : \frac{\varkappa}{\varkappa'},$$

und eben dieselbe Gleichung hat offenbar auch statt, wenn unter A, A′, B, C die vier Graden $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_3|$, $|\varkappa, \varkappa'|$, $|\lambda, \lambda'|$ verstanden werden. Man nennt, je nachdem von Punkten oder von Graden die Rede ist, den Quotienten

$$\frac{AB}{A'B} : \frac{AC}{A'C},$$

dessen analytischer Ausdruck $\frac{\lambda}{\lambda'} : \frac{\varkappa}{\varkappa'}$ ist und der sich auch zufolge der Gleichung 6. des 7. Abschnitts, je nachdem er positiv oder negativ ist, durch das positiv oder negativ genommene Sinusverhältniss

$$\frac{\sin AB}{\sin A'B} : \frac{\sin AC}{\sin A'C}$$

darstellen lässt, das Doppelverhältniss der vier Punkte oder der vier Graden A, A′, B, C; wir bezeichnen es durch

$$(AA'BC),\ |AA'BC|.$$

Wenn das Doppelverhältniss der negativen Einheit gleich ist, dann heissen die vier Punkte harmonische Punkte und die vier Grade harmonische Grade; es sind in Ueberein-

stimmung mit dem im 13. Abschnitte darüber Gesagten die Punkte

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3), (\varkappa, \varkappa'), (\varkappa, -\varkappa')$$

vier harmonische Punkte und die Graden

$$|a_1, a_2, a_3|, |a'_1, a'_2, a'_3|, |\varkappa, \varkappa'|, |\varkappa, -\varkappa'|$$

vier harmonische Grade. Es besteht zwischen ihnen die Beziehung, dass die durch vier harmonische Punkte gehenden Graden eines jeden Punktes harmonische Grade und die auf vier harmonischen Graden liegenden Punkte einer jeden Graden harmonische Punkte sind. Sie ergiebt sich aus den folgenden Sätzen:

Die durch vier Punkte einer Graden gehenden vier Graden eines jeden Punktes haben dasselbe Doppelverhältniss, wie jene vier Punkte.

Die auf vier Graden eines Punktes liegenden vier Punkte einer jeden Graden haben dasselbe Doppelverhältniss, wie jene vier Graden.

deren Richtigkeit unmittelbar aus den Formen der Verbindungslinien der vier Punkte mit einem beliebigen Punkte und der Durchschnittspunkte der vier Graden mit einer beliebigen Graden erhellt.

23. Für die vier harmonischen Punkte A, A′, B, C oder $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3), (\varkappa, \varkappa')$ $(\varkappa, -\varkappa')$ bestehen die sie characterisirenden Gleichungen

$$\frac{AB}{A'B} : \frac{AC}{A'C} = -1, \quad \frac{\sin AB}{\sin A'B} : \frac{\sin AC}{\sin A'C} = +1.$$

Man nennt jede zwei Punkte

$$(\varkappa, \varkappa'), (\varkappa, -\varkappa')$$

der Verbindungslinie der Punkte

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3),$$

die wir als die harmonischen Hauptpunkte bezeichnen, harmonisch conjugirte Punkte in Bezug auf sie. Zu einem jeden Punkte der Graden kann nur ein einziger — der vierte harmonische — Punkt angegeben werden, der ihm in Bezug auf sie harmonisch conjugirt ist. Und weiter erhellt aus der ersten der oben gegebenen Gleichungen unmittelbar, dass jede zwei harmonisch conjugirte Punkte durch die harmonischen Hauptpunkte von einander getrennt werden. Nur in zwei Fällen fallen zwei conjugirte Punkte zusammen. Ein

jeder der harmonischen Hauptpunkte ist nämlich sich selbst harmonisch conjugirt, denn der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ist durch (1, 0), der Punkt $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ durch (0, 1) darstellbar.

Die Mittelpunkte und die Winkelhalbirungspunkte der Graden in Bezug auf die harmonischen Hauptpunkte sind je zwei harmonisch conjugirte Punkte, denn sie sind durch die Formen

$$(\lambda, \lambda'), (\lambda, -\lambda')$$

dargestellt, wenn beziehungsweise

$$\lambda = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3, \; \lambda' = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3;$$

$$\lambda = \sqrt{\sigma_1^2 \alpha'^2_1 + --- 2\sigma_2\sigma_3 \cos \measuredangle A_1 \alpha'_2 \alpha'_3 ---},$$

$$\lambda' = \sqrt{\sigma_1^2 \alpha_1^2 + --- 2\sigma_2\sigma_3 \cos \measuredangle A_1 \alpha_2 \alpha_3 ---}$$

angenommen wird. Wir bezeichnen den innern Mittelpunkt und einen jeden der Winkelhalbirungspunkte durch M; werden dann zwei Punkte $(\varkappa, \varkappa')$, (μ, μ') durch B, C bezeichnet, so bestehen nach den Formeln 11. und 2. die Gleichungen

$$(\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa') \, \mathrm{MB} = (\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa') \, \mathrm{MA}$$
$$(\mu\lambda' + \lambda\mu') \, \mathrm{MC} = -(\mu\lambda' - \lambda\mu') \, \mathrm{MA'}$$

und

$$(\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa') \operatorname{tg} \mathrm{MB} = (\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa') \operatorname{tg} \mathrm{MA}$$
$$(\mu\lambda' + \lambda\mu') \operatorname{tg} \mathrm{MC} = -(\mu\lambda' - \lambda\mu') \operatorname{tg} \mathrm{MA'},$$

und wir ersehen daraus, dass für jede zwei harmonisch conjugirte Punkte B, C in Bezug auf die harmonischen Hauptpunkte A, A′, und nur für solche allein, die Relationen

$$\mathrm{MB} \, . \, \mathrm{MC} = -\mathrm{MA} \, . \, \mathrm{MA'} = +\overline{\mathrm{MA}}^2 = +\overline{\mathrm{MA'}}^2$$
$$\operatorname{tg} \mathrm{MB} \operatorname{tg} \mathrm{MC} = -\operatorname{tg} \mathrm{MA} \operatorname{tg} \mathrm{MA'} = +\operatorname{tg}^2 \mathrm{MA} = +\operatorname{tg}^2 \mathrm{MA'}$$

statthaben.

Von allen harmonisch conjugirten Punkten sind nur zwei, die Winkelhalbirungspunkte, zu einander senkrecht; denn die Bedingung, unter welcher die Punkte $(\varkappa, \varkappa')$, $(\varkappa, -\varkappa')$ zu einander senkrecht sind, ist

$$(\sigma_1^2\alpha_1^2 + --- 2\sigma_2\sigma_3 \cos \measuredangle A_1 \alpha_2 \alpha_3 ---) \varkappa^2$$
$$- (\sigma_1^2 \alpha'^2_1 + --- 2\sigma_2\sigma_3 \cos \measuredangle A_1 \alpha'_2 \alpha'_3 ---) \varkappa'^2 = 0.$$

Nur, wenn

$$\sigma_1^2\alpha_1^2 + --- 2\sigma_2\sigma_3 \cos \measuredangle A_1 \alpha_2 \alpha_3 --- = 0$$
$$\sigma_1^2 \alpha'^2_1 + --- 2\sigma_2\sigma_3 \cos \measuredangle A_1 \alpha'_2 \alpha'_3 --- = 0$$

ist, d. h. wenn von den harmonischen Hauptpunkten jeder auf

sich selbst senkrecht ist, nur dann sind nicht blos zwei, sondern jede zwei harmonisch conjugirte Punkte zu einander senkrecht.

Die harmonischen Hauptpunkte sind in Bezug auf jede zwei harmonisch conjugirte Punkte harmonisch conjugirte Punkte, denn es ist (AA'BC) = (BCAA'). Weil sie demnach auch in Bezug auf ihre (zu einander senkrechten) Winkelhalbirungspunkte harmonisch conjugirt sind, so werden, wenn die harmonischen Hauptpunkte zu einander senkrecht sind, durch sie die Winkel jeder zwei harmonisch conjugirter Punkte halbirt.

Diese Sätze sprechen wir in anderer Weise, indem wir sie zugleich ergänzen, folgendermassen aus:

Es giebt im Allgemeinen 2 harmonisch conjugirte Punkte, welche in Bezug auf die harmonischen Hauptpunkte, und 0 harmonisch conjugirte Punkte, in Bezug auf welche die harmonischen Hauptpunkte Winkelhalbirungspunkte sind; nur dann giebt es unendlich viele harmonisch conjugirte Punkte von der ersten Eigenschaft, wenn jeder der harmonischen Hauptpunkte auf sich selbst senkrecht ist, von der zweiten Eigenschaft, wenn von den harmonischen Hauptpunkten einer auf dem andern senkrecht ist, und von beiden Eigenschaften zugleich, wenn beides der Fall ist, d. i. wenn die harmonischen Hauptpunkte mit dem endlich fernen Punkte zusammenfallen.

Diesem Satze kann zur Seite gestellt werden der nachstehende Satz, dessen Bestehen leicht erhellt, wenn man bemerkt, dass, wenn die harmonischen Hauptpunkte in einen Punkt zusammenfallen, dieser Punkt und jeder beliebige andere immer zwei harmonisch conjugirte Punkte sind. Er lautet:

Es giebt im Allgemeinen 2 harmonisch conjugirte Punkte, welche in Bezug auf die harmonischen Hauptpunkte, und 0 harmonisch conjugirte Punkte, in Bezug auf welche die harmonischen Hauptpunkte Mittelpunkte sind; nur dann giebt es unendlich viele harmonisch conjugirte Punkte von der ersten Eigenschaft, wenn die harmonischen Hauptpunkte in einen zusammenfallen, von der zweiten Eigenschaft, wenn der eine der harmonischen Hauptpunkte auf der unendlich fernen Graden liegt, und von beiden Eigenschaften zugleich, wenn beides der Fall ist, d. i. wenn die harmonischen Hauptpunkte in einen Punkt der unendlich fernen Graden zusammenfallen.

24. Wir wissen, dass alle Graden und alle Punkte, durch deren Coordinaten beziehungsweise die Gleichungen

$$s_1^2 a_1^2 + \text{---} - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 \text{ ---} = 0$$
$$\sigma_1^2 \alpha_1^2 + \text{---} - 2 \sigma_2 \sigma_3 \cos \mathcal{A}_1 \alpha_2 \alpha_3 \text{ ---} = 0$$

erfüllt werden, auf sich selbst senkrecht sind. Diese Gleichungen lassen ihre Anzahl als eine unendliche erscheinen; trotzdem geht aus dem Wesen der Orthogonalität hervor, dass unter allen Graden und Punkten der Ebene nur die unendlich ferne Grade und der endlich ferne Punkt jene Eigenschaft haben können. Dieser Umstand zeigt, worauf auch schon verschiedene andere Anzeichen hindeuteten, dass in der Ebene Grade und Punkte existiren müssen, die sich unserer Wahrnehmung entziehen. Eine jede Grade und ein jeder Punkt hat reelle Coordinaten, und eine jede durch reelle Coordinaten gegebene Grade und ein jeder durch reelle Coordinaten gegebener Punkt kann in der Ebene aufgefunden werden. Die unserer Wahrnehmung sich entziehenden Graden und Punkte können daher nicht reelle Coordinaten besitzen, sie müssen, sämmtlich oder wenigstens zum Theil, imaginäre Grössen zu Coordinaten haben; — man nennt sie daher zum Unterschiede von den bisher nur in Betracht gekommenen, den sogenannten r e e l l e n G r a d e n u n d P u n k t e n i m a g i n ä r e G r a d e u n d P u n k t e. Die Einführung und Aufnahme dieser imaginären Graden und Punkte, die gleichsam verdeckt in der Ebene liegen, in die analytische Geometrie erweist sich in der Folge als von der grössten Wichtigkeit und Bedeutung; sie ist unabweislich. Wir setzen sie aus innerer Nothwendigkeit als gleichberechtigt mit den reellen Graden und Punkten voraus und nehmen so an, dass auch für sie die entwickelten Grundformeln der analytischen Geometrie Geltung haben.

25. Derjenige Punkt, welcher dem auf der Verbindungslinie der Punkte (μ, μ'), (ν, ν') liegenden Punkte $(\varkappa, \varkappa')$ in Bezug auf sie harmonisch conjugirt ist, ist durch die Form

$$(\varkappa(\mu\nu' + \nu\mu') - 2\varkappa'\mu\nu,\ 2\varkappa\mu'\nu' - \varkappa'(\mu\nu' + \nu\mu'))$$

gegeben; denn während sich der Punkt $(\varkappa, \varkappa')$ in Bezug auf sie durch die Form

$$((\varkappa\nu' - \nu\varkappa')\mu - (\varkappa\mu' - \mu\varkappa')\nu,\ (\varkappa\nu' - \nu\varkappa')\mu' - (\varkappa\mu' - \mu\varkappa')\nu')$$

darstellen lässt, ist er durch die Form

$((\varkappa\nu' - \nu\varkappa')\mu + (\varkappa\mu' - \mu\varkappa')\nu, (\varkappa\nu' - \nu\varkappa')\mu' + (\varkappa\mu' - \mu\varkappa')\nu')$ darstellbar.

Aus der gegebenen Form erhellt, dass in Bezug auf die Punkte

$$(\lambda, \lambda'), (\lambda, -\lambda')$$

die Punkte

$$(\varkappa, \varkappa'), (\varkappa'\lambda^2, \varkappa\lambda'^2)$$
$$(\varkappa, -\varkappa'), (\varkappa'\lambda^2, -\varkappa\lambda'^2)$$

je zwei harmonisch conjugirte Punkte sind. Diese Punkte stehen in einer merkwürdigen Beziehung zu einander. Setzen wir nämlich

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\varkappa'}{\varkappa}, \quad \frac{\mu'\lambda}{\mu\lambda'} = +a + \sqrt[2]{a^2 - 1}, \text{ so ist für}$$
$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\varkappa\lambda'^2}{\varkappa'\lambda^2}, \quad \frac{\mu'\lambda}{\mu\lambda'} = +a - \sqrt[2]{a^2 - 1},$$
$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{\varkappa'}{\varkappa}, \quad \frac{\mu'\lambda}{\mu\lambda'} = -a - \sqrt[2]{a^2 - 1},$$
$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{\varkappa\lambda'^2}{\varkappa'\lambda^2}, \quad \frac{\mu'\lambda}{\mu\lambda'} = -a + \sqrt[2]{a^2 - 1},$$

und man sieht, dass die Formen der vier Punkte aus der Gleichung

$$\frac{\mu'\lambda}{\mu\lambda'} = a + \sqrt[2]{a^2 - 1}$$

für einen bestimmten Werth von a^2 hervorgehen.

Jedem Werthe von a^2 entsprechen im Allgemeinen vier Punkte, dem positiven Werthe von a zwei und dem negativen auch zwei. Wir nennen die ersteren h y p e r b o l i s c h e, die letzteren e l l i p t i s c h e P u n k t e. Es giebt im Allgemeinen stets z w e i hyperbolische und z w e i elliptische einem Werthe von a^2 entsprechende Punkte; nur dem Werthe $a^2 = 1$ entspricht e i n hyperbolischer und e i n elliptischer Punkt

$$(\lambda, \lambda'), (\lambda, -\lambda').$$

Wir nennen den einen einen c y c l i s c h - h y p e r b o l i s c h e n und den andern einen c y c l i s c h - e l l i p t i s c h e n Punkt und beide zusammen die c y c l i s c h e n o d e r H a u p t p u n k t e. Hyperbolisch und elliptisch zugleich sind die den Werthen $a^2 = \infty$ und $a^2 = 0$ entsprechenden Punkte

$$(1, 0), (0, 1)$$
$$(\lambda, \iota\lambda'), (\lambda, -\iota\lambda').$$

Wir bezeichnen sie als **parabolische Punkte** und nennen in Uebereinstimmung mit der im 23. Abschnitte eingeführten Benennung die ersten zwei die **harmonischen Hauptpunkte**, die beiden letzten aber die **anharmonischen Hauptpunkte**.

Die hyperbolischen Punkte und ebenso die elliptischen Punkte eines Werthes von a^2 sind harmonisch conjugirte Punkte in Bezug auf die Hauptpunkte. Ferner sind offenbar von den einem Werthe von a^2 entsprechenden Punkten die Punkte

$$(\varkappa, \varkappa'), (\varkappa, -\varkappa')$$
$$(\varkappa'\lambda^2, \varkappa\lambda'^2), (\varkappa'\lambda^2, -\varkappa\lambda'^2)$$

in Bezug auf die harmonischen Hauptpunkte und die Punkte

$$(\varkappa, \varkappa'), (\varkappa'\lambda^2, -\varkappa\lambda'^2)$$
$$(\varkappa, -\varkappa'), (\varkappa'\lambda^2, \varkappa\lambda'^2)$$

in Bezug auf die anharmonischen Hauptpunkte, also immer ein hyperbolischer und ein elliptischer Punkt, harmonisch conjugirte Punkte.

Hiernach liegt es nun nahe, zwei Punkte von der Form

$$(\varkappa, \varkappa'), (\varkappa'\lambda^2, -\varkappa\lambda'^2)$$

anharmonisch conjugirte Punkte in Bezug auf die Punkte $(1, 0)$, $(0, 1)$ und in Rücksicht auf die Punkte (λ, λ'), $(\lambda, -\lambda')$ zu nennen. In Bezug auf die Punkte $(\lambda, \iota\lambda')$, $(\lambda, -\iota\lambda')$ sind dann die Punkte $(\varkappa, \varkappa')$, $(\varkappa, -\varkappa')$ anharmonisch conjugirte Punkte; denn da die Punkte (λ, λ'), $(\lambda, -\lambda')$ in Bezug auf die Punkte $(\lambda, \iota\lambda')$, $(\lambda, -\iota\lambda')$ durch die Formen $(1, \iota)'$, $(1, -\iota)'$ und der Punkt $(\varkappa, \varkappa')$ durch die Form $(\iota\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda, \iota\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)'$ dargestellt sind, so ist der diesem anharmonisch conjugirte Punkt der Punkt $(\iota\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda, \iota\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda)'$ oder also der Punkt $(\varkappa, -\varkappa')$. Darnach sind von den einem Werthe von a^2 entsprechenden Punkten die Punkte

$$(\varkappa, \varkappa'), (\varkappa, -\varkappa')$$
$$(\varkappa'\lambda^2, \varkappa\lambda'^2), (\varkappa'\lambda^2, -\varkappa\lambda'^2)$$

in Bezug auf die anharmonischen Hauptpunkte und die Punkte

$$(\varkappa, \varkappa'), (\varkappa'\lambda^2, -\varkappa\lambda'^2)$$
$$(\varkappa, -\varkappa'), (\varkappa'\lambda^2, \varkappa\lambda'^2)$$

in Bezug auf die harmonischen Hauptpunkte, also immer ein

hyperbolischer und ein elliptischer Punkt, anharmonisch conjugirte Punkte.

Jede zwei Punkte, die in Bezug auf die harmonischen Hauptpunkte harmonisch oder anharmonisch conjugirte Punkte sind, sind demnach in Bezug auf die anharmonischen Hauptpunkte anharmonisch oder harmonisch conjugirte Punkte, und umgekehrt.

Die harmonischen und anharmonischen Hauptpunkte sind in Bezug auf die anharmonischen resp. harmonischen harmonisch und in Bezug auf die harmonischen resp. anharmonischen Hauptpunkte anharmonisch conjugirt. Ein jeder harmonische und anharmonische Hauptpunkt ist sich selbst harmonisch in Bezug auf die harmonischen resp. anharmonischen und anharmonisch conjugirt in Bezug auf die anharmonischen resp. harmonischen Hauptpunkte.

In Bezug auf die Hauptpunkte sind sowohl die harmonischen, als auch anharmonischen Hauptpunkte harmonisch conjugirt; die Hauptpunkte sind harmonisch und zugleich auch anharmonisch conjugirt in Bezug auf die harmonischen und anharmonischen Hauptpunkte.

26. Von besonderer Wichtigkeit sind die beiden Fälle, in denen die Hauptpunkte die Mittelpunkte und Winkelhalbirungspunkte in Bezug auf die harmonischen Hauptpunkte sind.

In dem ersten Falle sind die Hauptpunkte, wie in Bezug auf die harmonischen, so auch in Bezug auf die anharmonischen Hauptpunkte, überhaupt in Bezug auf die zwei hyperbolischen und zwei elliptischen Punkte eines jeden Werthes von a^2 Mittelpunkte der Graden, denn in Bezug auf die cyclischen Punkte sind sowohl die parabolischen, als auch die hyperbolischen und elliptischen Punkte harmonisch conjugirte Punkte.

Wir bezeichnen denjenigen Hauptpunkt, welcher der innere Mittelpunkt ist, durch M, die harmonischen und anharmonischen Hauptpunkte durch A_1, A'_1; A_2, A'_2 und irgend einen Punkt der Graden (μ, μ') durch B; dann besteht, wenn

$$\lambda = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3, \; \lambda' = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$(\mu\lambda' + \mu'\lambda)\,\mathrm{MB} = (\mu\lambda' - \mu'\lambda)\,\mathrm{MA}_1,$$

sie führt in Folge der leicht erhellenden Gleichungen

$$2a = \frac{\mu\lambda'}{\mu'\lambda} + \frac{\mu'\lambda}{\mu\lambda'}, \quad \frac{(\mu\lambda' \pm \mu'\lambda)^2}{\mu\lambda' . \mu'\lambda} = 2a \pm 2$$

auf die Relationen

$$(a + 1)\,\overline{MB}^2 = (a - 1)\,\overline{MA}_1^2 = (a - 1)\,\overline{MA'}_1^2$$
$$\overline{MA}_1^2 + \overline{MA}_2^2 = 0, \quad \overline{MA'}_1^2 + \overline{MA'}_2^2 = 0$$
$$MA_1 . MA'_1 + MA_2 . MA'_2 = 0$$
$$(1 + a)\,\overline{MB}^2 = (1 - a)\,\overline{MA}_2^2 = (1 - a)\,\overline{MA'}_2^2.$$

Bezeichnen wir nun von den einem Werthe von a^2 entsprechenden Punkten die hyperbolischen durch B und die elliptischen durch C, so ist darnach offenbar

$$(a + 1)\,\overline{MB}^2 = (a - 1)\,\overline{MA}_1^2, \quad (a - 1)\,\overline{MC}^2 = (a + 1)\,\overline{MA}_1^2,$$

folglich

$$\overline{MB}^2 . \overline{MC}^2 = \overline{MA}_1^4 = \overline{MA'}_1^4 = \overline{MA}_2^4 = \overline{MA'}_2^4$$

und also

$$MB . MC = \mp MA_1 . MA'_1 = \pm \overline{MA}_1^2 = \pm \overline{MA'}_1^2$$
$$MB . MC = \pm MA_2 . MA'_2 = \mp \overline{MA}_2^2 = \pm \overline{MA'}_2^2;$$

wir erkennen hieraus, d a s s, w i e f ü r j e d e z w e i i n B e z u g a u f d i e P u n k t e A, A' — unter ihnen können sowohl die harmonischen, als auch anharmonischen Hauptpunkte verstanden werden — h a r m o n i s c h c o n j u g i r t e P u n k t e d i e R e l a t i o n

$$MB . MC = - MA . MA' = + \overline{MA}^2 = + \overline{MA'}^2$$

b e s t e h t, f ü r j e d e z w e i i n B e z u g a u f d i e P u n k t e A, A' a n h a r m o n i s c h c o n j u g i r t e P u n k t e d i e R e l a t i o n

$$MB . MC = + MA . MA' = - \overline{MA}^2 = - \overline{MA'}^2$$

s t a t t h a t. Hieran knüpfen wir mit einem Hinweis auf den 13. Abschnitt die Bemerkung, d a s s, w i e f ü r d i e h a r m o n i s c h c o n j u g i r t e n P u n k t e d i e R e l a t i o n

$$\frac{AB}{A'B} : \frac{AC}{A'C} = -1,$$

s o f ü r d i e a n h a r m o n i s c h c o n j u g i r t e n P u n k t e d i e R e l a t i o n

$$\frac{AB}{A'B} \cdot \frac{AC}{A'C} = -1$$

b e s t e h t — sie ergiebt sich vermittelst der Formel 10. sofort

aus den Formen $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(\varkappa, \varkappa')$, $(\varkappa'\lambda^2, -\varkappa\lambda'^2)$ —. Der Punkt M ist übrigens der Schwerpunkt und der um ihn als Centrum durch die Punkte A, A′ gehende Kreis der Kreis der mittleren quadratischen Entfernungen der mit den Coefficienten CM und MB behafteten Punkte B und C.

Für zwei Paar — harmonisch oder anharmonisch — conjugirter Punkte B, C; B_1, C_1 gilt die Relation

$$MB . MC = MB_1 . MC_1;$$

in Folge derselben ist

$$BB_1 . MC_1 = - MB . MC_1 + MB_1 . MC_1 = - MB . CC_1$$
$$BC_1 . MB_1 = - MB . MB_1 + MC_1 . MB_1 = - MB . CB_1,$$

somit

$$\frac{BB_1}{CC_1} = - \frac{MB}{MC_1} = - \frac{MB_1}{MC}$$
$$\frac{BC_1}{CB_1} = - \frac{MB}{MB_1} = - \frac{MC_1}{MC}$$

und daher

$$\frac{BB_1 . BC_1}{CB_1 . CC_1} = \frac{MB}{MC}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass für drei Paar conjugirter Punkte B, C; B_1, C_1; B_2, C_2 die Relationen

$$\frac{BB_1 . BC_1}{CB_1 . CC_1} = \frac{BB_2 . BC_2}{CB_2 . CC_2}$$
$$\frac{B_1B_2 . B_1C_2}{C_1B_2 . C_1C_2} = \frac{B_1B . B_1C}{C_1B . C_1C}$$
$$\frac{B_2B . B_2C}{C_2B . C_2C} = \frac{B_2B_1 . B_2C_1}{C_2B_1 . C_2C_1}$$

bestehen; wir fügen ihnen noch die Relationen

$$BC_1 . B_1C_2 . B_2C = BC_2 . B_1C . B_2C_1$$
$$BB_1 . C_1B_2 . C_2C = BB_2 . C_1C . C_2B_1$$
$$CC_1 . B_1B_2 . C_2B = CB_2 . B_1B . C_2C_1$$
$$CB_1 . C_1C_2 . B_2B = CC_2 . C_1B . B_2B_1,$$

deren Beweis leicht erfindlich ist, hinzu und bemerken, dass man sechs Punkte, welche diesen sieben Relationen, die übrigens alle von einer unter ihnen abhängen, genügen, *sechs Punkte in Involution* nennt. Man kann diese sieben Relationen auch in der Form

$$(BCB_1B_2) = (BCC_2C_1),\ (B_1C_1B_2B) = (B_1C_1CC_2),$$
$$(B_2C_2BB_1) = (B_2C_2C_1C);$$
$$(BB_1CC_2) = (BB_2CC_1),\ (BC_1CB_2) = (BC_2CB_1)$$
$$(CB_1BB_2) = (CC_2BC_1),\ (CC_1BC_2) = (CB_2BB_1)$$

schreiben und erkennt daraus, dass sie auch dann Geltung haben, wenn jedem Factor das Zeichen sin vorgesetzt wird. Zudem sieht man, dass sechs Punkte

$$(1, 0), (0, 1); (\varkappa, \varkappa'), (\lambda, \lambda'); (\mu, \mu'), (\nu, \nu')$$

sechs Punkte in Involution sind, wenn für sie die Gleichung

$$\frac{\varkappa\lambda}{\varkappa'\lambda'} = \frac{\mu\nu}{\mu'\nu'} \qquad 20.$$

besteht.

Die Gleichung

$$\frac{\mu'\lambda}{\mu\lambda'} = a + \sqrt[2]{a^2 - 1}$$

führt übrigens in diesem ersten der oben bezeichneten Fälle, wenn durch A, A', B die Punkte (1, 0), (0, 1), (μ, μ') bezeichnet werden, auf die Gleichungen

$$\frac{AB}{BA'} = a + \sqrt[2]{a^2 - 1},\ \frac{A'B}{BA} = a - \sqrt[2]{a^2 - 1}$$

und daher, weil demgemäss

$$(1 + a - \sqrt[2]{a^2 - 1})\, AB = AA',\ (1 + a + \sqrt[2]{a^2 - 1})\, A'B + A'A$$

ist, wenn

$$1 + a = e^2$$

gesetzt wird, auf die Gleichung

$$2e^2\, AB \,.\, A'B = AA' \,.\, A'A$$

und zeigt, dass, die Punkte A, A' als reelle Punkte vorausgesetzt, auf der Verbindungslinie dieser Punkte, wenn

$a^2 = \infty$ und somit $e^2 = \infty$

und $a^2 > 1$ und somit $e^2 > 2$ oder $e^2 < 0$

ist, je zwei reelle, wenn

$a^2 = 1$ und somit $e^2 = 2$ oder $e^2 = 0$

ist, je ein reeller, und wenn

$a^2 < 1$ und somit $e^2 < 2$ oder $e^2 > 0$

und $a^2 = 0$ und somit $e^2 = 1$

ist, je zwei imaginäre Punkte sich befinden, die dieser Gleichung genügen.

Die dem Werthe

$$a = -\tfrac{3}{2} \text{ oder } e^2 = -\tfrac{1}{2}$$

entsprechenden zwei reellen Punkte B haben die Eigenschaft, dass für sie die Gleichung

$$\overline{AA'}^2 = AB \,.\, A'B$$

besteht oder dass, wie man sagt, die Strecke AB durch den Punkt A′ und die Streke A′B durch den Punkt A golden getheilt wird.

In dem zweiten Falle sind die Hauptpunkte in analoger Weise, wie in Bezug auf die harmonischen, so auch in Bezug auf die anharmonischen Hauptpunkte, überhaupt in Bezug auf die zwei hyperbolischen und zwei elliptischen Punkte eines jeden Werthes von a^2 Winkelhalbirungspunkte der Graden.

Es gelten — das zeigt die Conformität der den im ersten Falle zur Anwendung gekommenen entsprechenden Formeln —, wenn M einen der Hauptpunkte, A_1, A'_1; A_2, A'_2 die harmonischen und anharmonischen Hauptpunkte und B irgend einen Punkt der Graden bedeutet, die Relationen

$$(a+1)\,\mathrm{tg}^2 MB = (a-1)\,\mathrm{tg}^2 MA_1 = (a-1)\,\mathrm{tg}^2 MA'_1$$
$$\mathrm{tg}^2 MA_1 + \mathrm{tg}^2 MA_2 = 0, \quad \mathrm{tg}^2 MA'_1 + \mathrm{tg}^2 MA'_2 = 0$$
$$\mathrm{tg}\, MA_1\, \mathrm{tg}\, MA'_1 + \mathrm{tg}\, MA_2\, \mathrm{tg}\, MA'_2 = 0$$
$$(1+a)\,\mathrm{tg}^2 MB = (1-a)\,\mathrm{tg}^2 MA_2 = (1-a)\,\mathrm{tg}^2 MA'_2.$$

Und weiter bestehen, wie für jede zwei in Bezug auf die Punkte A, A′ — unter ihnen können sowohl die harmonischen, als auch anharmonischen Hauptpunkte verstanden werden — harmonisch conjugirte Punkte B, C die Relationen

$$\mathrm{tg}\, MB\, \mathrm{tg}\, MC = -\,\mathrm{tg}\, MA\, \mathrm{tg}\, MA' = +\,\mathrm{tg}^2 MA = +\,\mathrm{tg}^2 MA'$$
$$\frac{\sin AB}{\sin A'B} : \frac{\sin AC}{\sin A'C} = +1$$

gelten, für jede zwei in Bezug auf die Punkte A, A′ anharmonisch conjugirte Punkte B, C die Relationen

$$\mathrm{tg}\, MB\, \mathrm{tg}\, MC = +\,\mathrm{tg}\, MA\, \mathrm{tg}\, MA' = -\,\mathrm{tg}^2 MA = -\,\mathrm{tg}^2 MA'$$
$$\frac{\sin AB}{\sin A'B} \cdot \frac{\sin AC}{\sin A'C} = +1.$$

27. Die sechs Verbindungslinien von vier Punkten gehen

zu zweien durch drei Punkte, welche man die zu den vier Punkten gehörigen Diagonalpunkte nennt. Die Verbindungslinie jeder zwei zu vier Punkten gehöriger Diagonalpunkte bestimmt auf den durch den jedesmaligen dritten Diagonalpunkt und die vier Punkte gehenden zwei Graden zwei Punkte, die in Bezug auf jene beiden Diagonalpunkte harmonisch conjugirt und die vierten harmonischen Punkte sind zu den auf jenen Graden zu zweien liegenden vier Punkten und dem dritten Diagonalpunkte. Denn, nimmt man die vier Punkte an als gegeben durch die Formen

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3);$$

so sind die Diagonalpunkte

$$(0, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1, 0, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_2, 0)$$

und die auf der Verbindungslinie z. B. der letztgenannten zwei Diagonalpunkte liegenden in Rede stehenden Punkte

$$(0, \alpha_2, -\alpha_3), (2\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Der erste Theil dieses Satzes ist ein specieller Fall des folgenden Satzes: Die sechs Verbindungslinien von vier Punkten bestimmen auf jeder Graden sechs Punkte in Involution, und zwar immer zwei durch einen Diagonalpunkt gehende zwei conjugirte Punkte, dessen Richtigkeit in Erinnerung an die Gleichung 20. sofort aus dem Umstande erhellt, dass jede Grade auf den durch die Punkte $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$; $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(1, 0, 0)$ gehenden Graden Punkte von der Form

$$(0, \varkappa, \varkappa'), (\lambda + \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

bestimmt und in Bezug auf diese die Punkte, die sie auf den durch die Punkte $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$; $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(0, 1, 0)$ und den durch die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$; $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(0, 0, 1)$ gehenden Graden bestimmt, durch die Formen

$$(\alpha_2, -\varkappa), (\lambda\alpha_3, \varkappa'\alpha_1); (\alpha_3, -\varkappa'), (\lambda\alpha_2, \varkappa\alpha_1)$$

darstellbar sind. Nach diesem Satze findet man, wenn auf einer Graden zwei Paar conjugirter Punkte B, C; B_1, C_1 gegeben sind, den einem beliebigen Punkte B_2 conjugirten Punkt C_2, wenn man auf einer beliebigen Graden des Punktes B_2 zwei Punkte A_2, A_3 annimmt und die Durchschnittspunkte der Graden A_2B, A_3C_1; A_2B_1, A_3C und deren Verbindungslinie

bestimmt, indem diese mit der gegebenen Graden durch den Punkt C_2 geht. Wenn man die Punkte B, C und ebenso die Punkte B_1, C_1 als in einander zusammenfallend annimmt, so erhält man auf diese Weise den zu den Punkten B, B_1; B_2 gehörigen vierten harmonischen Punkt.

Im Anschluss hieran geben wir — und damit beschliessen wir den ersten Theil dieser Schrift — ohne den leicht zu führenden Beweis die folgenden Sätze:

Die drei den Durchschnittspunkten der Verbindungslinien eines Punktes mit den Eckpunkten eines Dreiecks und der diesen entsprechenden Seitenlinien in Bezug auf die auf diesen liegenden Eckpunkte harmonisch conjugirten Punkte liegen auf der ihm reciprokförmig entsprechenden Graden.

Die Verbindungslinien der drei den Durchschnittspunkten der Verbindungslinien eines Punktes mit den Eckpunkten eines Dreiecks und der diesen entsprechenden Seitenlinien in Bezug auf die Seitenmittelpunkte (den inneren und den äusseren) conjugirt harmonischen Punkte mit den entsprechenden Eckpunkten gehen durch den ihm reciprokförmig entsprechenden Punkt.

Drei durch einen Punkt gehende Grade der Eckpunkte eines Dreiecks und die drei ihnen in Bezug auf die Seitenlinien harmonisch conjugirten Graden gehen zu dreien durch vier Punkte von der Form

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3)$,

und die Durchschnittspunkte dieser sechs Graden mit den Seitenlinien, die einander in Bezug auf die Eckpunkte harmonisch conjugirt sind, liegen zu dreien auf den diesen Punkten reciprokförmig entsprechenden Graden.

Zweiter Theil.

Erstes Kapitel.

Classification und Eigenschaften der Kegelschnitte. Die imaginären Kreispunkte.

---

1. In dem ersten Theile dieser Schrift ist bemerkt worden, dass die Curven, die von den einer Gleichung von der Form

$$\mathfrak{a}_{11}\alpha_1^2 + \mathfrak{a}_{22}\alpha_2^2 + \mathfrak{a}_{33}\alpha_3^2 + (\mathfrak{a}_{23} + \mathfrak{a}_{32})\,\alpha_2\alpha_3 \\ + (\mathfrak{a}_{31} + \mathfrak{a}_{13})\,\alpha_3\alpha_1 + (\mathfrak{a}_{12} + \mathfrak{a}_{21})\,\alpha_1\alpha_2 = 0$$

genügenden Punkten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ gebildet oder von den einer Gleichung von der Form

$$\alpha_{11}\mathfrak{a}_1^2 + \alpha_{22}\mathfrak{a}_2^2 + \alpha_{33}\mathfrak{a}_3^2 + (\alpha_{23} + \alpha_{32})\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 \\ + (\alpha_{31} + \alpha_{13})\,\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = 0$$

genügenden Graden $|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3|$ eingehüllt werden, Kegelschnitte genannt werden, und dass diese Gleichungen einen und denselben Kegelschnitt darstellen, wenn in ihnen die Coefficienten in der im 14. Abschnitte gekennzeichneten Beziehung zu einander stehen und die Indices eines jeden Coefficienten mit einander vertauscht werden können, ohne dass sich dadurch sein Werth ändert. In den nachfolgenden Blättern, in denen die Kegelschnitte untersucht werden, nehmen wir diese Bedingungen als erfüllt an, so dass also insbesondere die Gleichungen

$$\mathfrak{a}_{23} = \mathfrak{a}_{32},\quad \mathfrak{a}_{31} = \mathfrak{a}_{13},\quad \mathfrak{a}_{12} = \mathfrak{a}_{21}$$
$$\alpha_{23} = \alpha_{32},\quad \alpha_{31} = \alpha_{13},\quad \alpha_{12} = \alpha_{21}$$

gelten, und demnach der Kegelschnitt sowohl durch die Gleichung

$$\mathfrak{a}_{11}\alpha_1^2 + \mathfrak{a}_{22}\alpha_2^2 + \mathfrak{a}_{33}\alpha_3^2 + 2\mathfrak{a}_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2\mathfrak{a}_{31}\alpha_3\alpha_1 \\ + 2\mathfrak{a}_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

als auch durch die Gleichung

$$\alpha_{11}\mathfrak{a}_1^2 + \alpha_{22}\mathfrak{a}_2^2 + \alpha_{33}\mathfrak{a}_3^2 + 2\alpha_{23}\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 + 2\alpha_{31}\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1 + 2\alpha_{12}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = 0$$

dargestellt ist, und beginnen die Untersuchungen mit der Herleitung dieser Thatsache, die nach dem ersten Theile offenbar an die einschränkende Bedingung, dass die Determinante Δ^3 nicht Null ist, gebunden ist.

Die Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, aus denen die Curve besteht, sollen Punkte des Kegelschnitts und die sie einhüllenden Graden Grade (Tangenten) des Kegelschnitts genannt werden.

2. Die Gleichung

$$\mathfrak{a}_{11}\alpha_1^2 + \mathfrak{a}_{22}\alpha_2^2 + \mathfrak{a}_{33}\alpha_3^2 + 2\mathfrak{a}_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2\mathfrak{a}_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2\mathfrak{a}_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0$$

lässt sich in der Form

$$\mathfrak{a}_1\alpha_1 + \mathfrak{a}_2\alpha_2 + \mathfrak{a}_3\alpha_3 = 0$$

darstellen, wenn

$$1.\qquad \begin{aligned} \Delta\mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{a}_{11}\alpha_1 + \mathfrak{a}_{12}\alpha_2 + \mathfrak{a}_{13}\alpha_3 \\ \Delta\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{a}_{21}\alpha_1 + \mathfrak{a}_{22}\alpha_2 + \mathfrak{a}_{23}\alpha_3 \\ \Delta\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{a}_{31}\alpha_1 + \mathfrak{a}_{32}\alpha_2 + \mathfrak{a}_{33}\alpha_3 \end{aligned}$$

gesetzt wird. Bestimmen wir die in diesen Gleichungen eingeführte Grösse Δ durch die Determinantengleichung

$$-\Delta^3 = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11}, & \mathfrak{a}_{12}, & \mathfrak{a}_{13} \\ \mathfrak{a}_{21}, & \mathfrak{a}_{22}, & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{31}, & \mathfrak{a}_{32}, & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix},$$

die in entwickelter Form

$$-\Delta^3 = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33} + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{a}_{12} - \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{23}^2 - \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{31}^2 - \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{12}^2$$

lautet, und setzen wir alsdann

$$-\Delta\alpha_{11} = \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33} - \mathfrak{a}_{23}^2, \quad -\Delta\alpha_{22} = \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{a}_{31}^2, \quad -\Delta\alpha_{33} = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22} - \mathfrak{a}_{12}^2$$

$$-\Delta\alpha_{23} = \mathfrak{a}_{31}\mathfrak{a}_{12} - \mathfrak{a}_{23}\mathfrak{a}_{11}, \quad -\Delta\alpha_{31} = \mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{23} - \mathfrak{a}_{31}\mathfrak{a}_{22}, \quad -\Delta\alpha_{12} = \mathfrak{a}_{23}\mathfrak{a}_{31} - \mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{33},$$

so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{1\iota}\alpha_{1\varkappa} + \mathfrak{a}_{2\iota}\alpha_{2\varkappa} + \mathfrak{a}_{3\iota}\alpha_{3\varkappa} &= \varepsilon\Delta^2 \\ \mathfrak{a}_{\iota 1}\alpha_{\varkappa 1} + \mathfrak{a}_{\iota 2}\alpha_{\varkappa 2} + \mathfrak{a}_{\iota 3}\alpha_{\varkappa 3} &= \varepsilon\Delta^2, \end{aligned}$$

in denen für ι, $\varkappa$ die Zahlen 1, 2, 3 zu setzen und, je nach-

dem $\iota = \varkappa$ ist, oder nicht, ε Eins oder Null ist, und somit auch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varDelta\alpha_1 &= \alpha_{11}\mathfrak{a}_1 + \alpha_{12}\mathfrak{a}_2 + \alpha_{13}\mathfrak{a}_3 \\ \varDelta\alpha_2 &= \alpha_{21}\mathfrak{a}_1 + \alpha_{22}\mathfrak{a}_2 + \alpha_{23}\mathfrak{a}_3 \\ \varDelta\alpha_3 &= \alpha_{31}\mathfrak{a}_1 + \alpha_{32}\mathfrak{a}_2 + \alpha_{33}\mathfrak{a}_3, \end{aligned} \qquad 2.$$

und es ist darnach klar, dass sich die Eingangs gegebene Gleichung vermittelst der Substitutionsgleichungen 2. in die Form

$$\alpha_{11}\mathfrak{a}_1^2 + \alpha_{22}\mathfrak{a}_2^2 + \alpha_{33}\mathfrak{a}_3^2 + 2\alpha_{23}\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 + 2\alpha_{31}\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1 + 2\alpha_{12}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = 0$$

bringen lässt, zugleich aber auch, weil die angeführten Gleichungen zwischen den Coefficienten auch dann, wenn die lateinischen und griechischen kleinen Buchstaben mit einander vertauscht werden, ihre Geltung behalten, dass das Umgekehrte vermittelst der Substitutionsgleichungen 1. geschehen kann, und zwar geht, wenn wir die abkürzenden Bezeichnungen

$$S = \mathfrak{a}_{11}\alpha_1^2 + \mathfrak{a}_{22}\alpha_2^2 + \mathfrak{a}_{33}\alpha_3^2 + 2\mathfrak{a}_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2\mathfrak{a}_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2\mathfrak{a}_{12}\alpha_1\alpha_2$$

$$\Sigma = \alpha_{11}\mathfrak{a}_1^2 + \alpha_{22}\mathfrak{a}_2^2 + \alpha_{33}\mathfrak{a}_3^2 + 2\alpha_{23}\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 + 2\alpha_{31}\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1 + 2\alpha_{12}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$$

einführen, der Ausdruck $\varDelta^2 S$ in den Ausdruck $\varDelta^2\Sigma$ vermittelst der Substitutionsgleichungen 2. und vermittelst der Substitutionsgleichungen 1. der Ausdruck $\varDelta^2\Sigma$ in den Ausdruck $\varDelta^2 S$ über. Die Gleichung $S = 0$ stellt, wie man sagt, einen Kegelschnitt in Punkt-, die Gleichung $\Sigma = 0$ denselben Kegelschnitt in Liniencoordinaten dar. Wir bezeichnen die Gleichungen $S = 0$ und $\Sigma = 0$ die eine als der andern zugehörig oder — erforderlichen Falls die eine als der andern zugeordnet, wenn sie, wie im gegenwärtigen Falle, ohne mit einer Constanten multiplicirt zu werden, so beschaffen sind, dass der Ausdruck $\varDelta^2 S$ oder $\varDelta^2\Sigma$ vermittelst der obigen Substitutionsgleichungen in den Ausdruck $\varDelta^2\Sigma$ oder $\varDelta^2 S$ übergeht.

Nur in einem Falle, nämlich wenn die Grösse $\varDelta$ — die Discriminante der Kegelschnittsgleichung — Null ist, kann offenbar eine einen Kegelschnitt in Punktcoordinaten darstellende Gleichung in eine ihn in Liniencoordinaten und eine einen Kegelschnitt in Liniencoordinaten darstellende Gleichung in eine ihn in Punktcoordinaten repräsentirende Gleichung nicht übergeführt werden.

Im ersten dieser Ausnahmefälle setzen wir

$$-\alpha_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2, \quad -\alpha_{22} = a_{33}a_{11} - a_{31}^2,$$
$$-\alpha_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$
$$-\alpha_{23} = a_{31}a_{12} - a_{23}a_{11}, \quad -\alpha_{31} = a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22},$$
$$-\alpha_{12} = a_{23}a_{31} - a_{12}a_{33}$$

und bemerken, dass

$$0 = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2, \quad 0 = \alpha_{33}\alpha_{11} - \alpha_{31}^2, \quad 0 = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2$$
$$0 = \alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{23}\alpha_{11}, \quad 0 = \alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{31}\alpha_{22},$$
$$0 = \alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{33}$$

ist. Wir können alsdann die Gleichung $S = 0$ durch Multiplication und Substitution in die Form

$$a_{11}^2\alpha_1^2 + (a_{12}^2 - \alpha_{33})\alpha_2^2 + (a_{31}^2 - \alpha_{22})\alpha_3^2 + 2(a_{31}a_{12} + \alpha_{23})\alpha_2\alpha_3$$
$$+ 2a_{31}a_{11}\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}a_{11}\alpha_1\alpha_2 = 0$$

bringen, in der sie als das Product der Gleichungen

$$a_{11}\alpha_1 + (a_{12} + \sqrt{\alpha_{33}})\,\alpha_2 + (a_{13} - \sqrt[2]{\alpha_{22}})\,\alpha_3 = 0$$
$$a_{11}\alpha_1 + (a_{12} - \sqrt{\alpha_{33}})\,\alpha_2 + (a_{13} + \sqrt[2]{\alpha_{22}})\,\alpha_3 = 0$$

erscheint, wenn in diesen die zweideutige Quadratwurzel positiv oder negativ angenommen wird, je nachdem α_{23} positiv oder negativ ist. Es stellt demnach die Gleichung $S = 0$ zwei oder eine (zwei zusammenfallende) Grade dar, die durch jede der Formen

$$|a_{11},\ a_{12} \pm \sqrt{\alpha_{33}},\ a_{13} \mp \sqrt[2]{\alpha_{22}}|$$
$$|a_{21} \mp \sqrt[2]{\alpha_{33}},\ a_{22},\ a_{23} \pm \sqrt{\alpha_{11}}|$$
$$|a_{31} \pm \sqrt{\alpha_{22}},\ a_{32} \mp \sqrt[2]{\alpha_{11}},\ a_{33}|,$$

in denen die zweideutigen Quadratwurzeln beziehungsweise positiv oder negativ anzunehmen sind, je nachdem α_{23}, α_{31}, α_{12} positiv oder negativ sind, gegeben werden, und zwar zwei imaginäre oder reelle oder eine (zwei zusammenfallende) reelle Grade, je nachdem eine und damit jede der Grössen α_{11}, α_{22}, α_{33} negativ oder positiv oder mehr als eine dieser Grössen Null ist.

Die der Gleichung $S = 0$ zugehörige Gleichung $\Sigma = 0$ stellt, da sie durch Multiplication mit α_{11}, α_{22}, α_{33} in die Formen

$$(\alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \alpha_{13}a_3)^2 = 0, \quad (\alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{23}a_3)^2 = 0,$$
$$(\alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3)^2 = 0$$

gebracht werden kann, den durch die Formen

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}), (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$$

dargestellten Punkt dar, der der Durchschnittspunkt der Graden ist, in die, wie man sagt, der Kegelschnitt $S = 0$ degenerirt.

In dem zweiten Ausnahmefalle degenerirt in analoger Weise der Kegelschnitt $\Sigma = 0$ in Punkte und der zugehörige Kegelschnitt $S = 0$ ist ihre Verbindungslinie.

In den Fällen, wo der Kegelschnitt in eine Grade oder in einen Punkt degenerirt, nehmen die zugehörigen Gleichungen die Form $0 = 0$ an, weil dann ihre Coefficienten sämmtlich Null sind.

3. Die nächstliegende Frage ist die nach der Anzahl und Bestimmung der dem Kegelschnitt und einer gegebenen Graden oder einem gegebenen Punkte gemeinschaftlichen Punkte und Graden.

Der Durchschnittspunkt der gegebenen Graden $|a'_1, a'_2, a'_3|$ mit der beliebigen Graden $|a_1, a_2, a_3|$ ist durch die Form

$$(a_2 a'_3 - a_3 a'_2, \; a_3 a'_1 - a_1 a'_3, \; a_1 a'_2 - a_2 a'_1)$$

gegeben, und es muss daher, wenn dieser Punkt ein Punkt des Kegelschnitts sein soll, die Gleichung

$$a_{11} (a_2 a'_3 - a_3 a'_2)^2 + \cdots$$
$$+ 2a_{23} (a_3 a'_1 - a_1 a'_3)(a_1 a'_2 - a_2 a'_1) + \cdots = 0$$

statt haben; eine jede Grade $|a_1, a_2, a_3|$, die durch einen der dem Kegelschnitt und der gegebenen Graden gemeinschaftlichen Punkte hindurchgeht, muss somit durch ihre Coordinaten diese Gleichung erfüllen, und es stellt demnach diese Gleichung die dem Kegelschnitt und der gegebenen Graden gemeinschaftlichen Punkte, deren Anzahl darnach 1 oder 2 ist, dar.

Denken wir uns die Grade $|a'_1, a'_2, a'_3|$ durch die Gleichung

$$a'_{11}\alpha_1^2 + a'_{22}\alpha_2^2 + a'_{33}\alpha_3^2 + 2a'_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a'_{31}\alpha_3\alpha_1$$
$$+ 2a'_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0$$

oder kurz durch die Gleichung $S' = 0$ gegeben, so dass die Gleichungen $a'^2_1 = a'_{11}$, $a'_2 a'_3 = a'_{23}$, u. s. f. statt haben, und setzen wir alsdann

$$\beta'_{11} = a_{22}a'_{33} + a_{33}a'_{22} - 2a_{23}a'_{23}$$
$$\beta'_{22} = a_{33}a'_{11} + a_{11}a'_{33} - 2a_{31}a'_{31}$$
$$\beta'_{33} = a_{11}a'_{22} + a_{22}a'_{11} - 2a_{12}a'_{12}$$

$$\beta'_{23} = a_{12}a'_{13} + a_{13}a'_{12} - a_{11}a'_{23} - a_{23}a'_{11}$$
$$\beta'_{31} = a_{23}a'_{21} + a_{21}a'_{23} - a_{22}a'_{31} - a_{31}a'_{22}$$
$$\beta'_{12} = a_{31}a'_{32} + a_{32}a'_{31} - a_{33}a'_{12} - a_{12}a'_{33},$$

so können wir die auf der Graden $S' = 0$ liegenden Punkte des Kegelschnitts $S = 0$ durch die Gleichung $\beta'_{11}a_1^2 + --$ $+ 2\beta'_{23}a_2a_3 + --- = 0$ oder nach Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$2\Phi' = \beta'_{11}a_1^2 + \beta'_{22}a_2^2 + \beta'_{33}a_3^2 + 2\beta'_{23}a_2a_3 + 2\beta'_{31}a_3a_1 + 2\beta'_{12}a_1a_2$$

durch die Gleichung

$$\Phi' = 0$$

repräsentiren. Wir bemerken nun, dass ganz allgemein, wenn

$$3\Theta' = \Delta(\alpha_{11}a'_{11} + \alpha_{22}a'_{22} + \alpha_{33}a'_{33} + 2\alpha_{23}a'_{23} + 2\alpha_{31}a'_{31} + 2\alpha_{12}a'_{12})$$
$$3\Theta = \Delta'(\alpha'_{11}a_{11} + \alpha'_{22}a_{22} + \alpha'_{33}a_{33} + 2\alpha'_{23}a_{23} + 2\alpha'_{31}a_{31} + 2\alpha'_{12}a_{12}),$$

wo Δ, Δ' in dem Falle, wo der Kegelschnitt degenerirt, wegzulassen ist, und ferner

$$b'_{11} = \alpha_{22}\alpha'_{33} + \alpha_{33}\alpha'_{22} - 2\alpha_{23}\alpha'_{23}$$
$$b'_{22} = \alpha_{33}\alpha'_{11} + \alpha_{11}\alpha'_{33} - 2\alpha_{31}\alpha'_{31}$$
$$b'_{33} = \alpha_{11}\alpha'_{22} + \alpha_{22}\alpha'_{11} - 2\alpha_{12}\alpha'_{12}$$
$$b'_{23} = \alpha_{12}\alpha'_{13} + \alpha_{13}\alpha'_{12} - \alpha_{11}\alpha'_{23} - \alpha_{23}\alpha'_{11}$$
$$b'_{31} = \alpha_{23}\alpha'_{21} + \alpha_{21}\alpha'_{23} - \alpha_{22}\alpha'_{31} - \alpha_{31}\alpha'_{22}$$
$$b'_{12} = \alpha_{31}\alpha'_{32} + \alpha_{32}\alpha'_{31} - \alpha_{33}\alpha'_{12} - \alpha_{12}\alpha'_{33}$$

gesetzt wird, die folgenden Relationen, in denen gleichfalls Δ, Δ' in dem bezeichneten Falle fortzulassen ist, statt haben:

$$\beta'_{22}\beta'_{33} - \beta'^2_{23} = -3\Theta a_{11} - 3\Theta' a'_{11} - \Delta\Delta' b'_{11}, \qquad 3.$$
$$\beta'_{31}\beta'_{12} - \beta'_{23}\beta'_{11} = -3\Theta a_{23} - 3\Theta' a'_{23} - \Delta\Delta' b'_{23}, \text{ u. s. f.}$$

In dem gegenwärtigen Falle ist

$$\beta'_{22}\beta'_{33} - \beta'^2_{23} = -3\Theta' a'_{11}, \quad \beta'_{33}\beta'_{11} - \beta'^2_{31} = -3\Theta' a'_{22},$$
$$\beta'_{11}\beta'_{22} - \beta'^2_{12} = -3\Theta' a'_{33},$$

und demnach hat also die Grade $S' = 0$ mit dem Kegelschnitt zwei imaginäre, einen (zwei zusammenfallende) oder zwei reelle Punkte gemein, je nachdem Θ' negativ, Null oder positiv ist.

Die unendlich ferne Grade, die offenbar durch die Gleichung

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_3\alpha_1 + 2\alpha_1\alpha_2 = 0$$

dargestellt ist, hat somit mit dem Kegelschnitt zwei imaginäre, einen oder zwei reelle Punkte gemein, je nachdem die Grösse $3\Theta'$, die wir in diesem besondern Falle durch $\mathit{\Delta}$ bezeichnen, je nachdem also die Grösse

$$\mathit{\Delta} = \Delta\,(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12})$$

negativ, Null oder positiv ist. Darnach unterscheidet man drei Arten von Kegelschnitten. Im ersten Falle wird der Kegelschnitt eine Ellipse, im zweiten eine Parabel und im dritten eine Hyperbel genannt, vorausgesetzt, dass die Discriminante nicht Null ist. Ist sie Null, so ist sie in dem gegebenen Ausdrucke wegzulassen, und das Negativ-, Null- oder Positivsein desselben deutet dann an, dass der Kegelschnitt in zwei imaginäre nicht parallele, in zwei parallele oder in eine (zwei zusammenfallende) und in zwei nicht parallele reelle Grade beziehungsweise degenerirt. Wir bemerken, dass, wenn die Grössen

$$\lambda_1 = a_{22} + a_{33} - 2a_{23},\; \lambda_2 = a_{33} + a_{11} - 2a_{31},$$
$$\lambda_3 = a_{11} + a_{22} - 2a_{12}$$

eingeführt werden,

$$4\mathit{\Delta} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_3\lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_2$$

gesetzt werden kann. Die Proportion

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = s_1^2 : s_2^2 : s_3^2$$

kennzeichnet nach dem ersten Theile den Kegelschnitt als einen Kreis, der zur Gattung der Ellipse gehört; in der That ist,

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{s_1^2} = \frac{\lambda_2}{s_2^2} = \frac{\lambda_3}{s_3^2}$$

gesetzt, die Grösse

$$\mathit{\Delta} = -4J^2\lambda^2.$$

Die auf der unendlich fernen Graden liegenden Punkte des Kegelschnitts sind durch die Gleichung

$$\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2 - (\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)\, a_2 a_3$$
$$- (\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2)\, a_3 a_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)\, a_1 a_2 = 0$$

repräsentirt, und insbesondere stellt die Gleichung

$$s_1^2 a_1^2 + s_2^2 a_2^2 + s_3^2 a_3^2 - 2s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 - 2s_3 s_1 \cos A_2 a_3 a_1$$
$$- 2s_1 s_2 \cos A_3 a_1 a_2 = 0$$

die auf der unendlich fernen Graden liegenden zwei imaginären

Punkte des Kreises dar. Sie werden die (unendlich fernen) imaginären Kreispunkte genannt; sie erscheinen dadurch merkwürdig, dass durch sie, weil ihre Gleichung unabhängig von der des Kreises ist, alle Kreise und ausserdem nach dem ersten Theile alle auf sich selbst senkrechten Graden hindurchgehen.

Der analoge Gang der Untersuchung führt auf die Bestimmung der dem Kegelschnitte und einem Punkte gemeinschaftlichen Graden. Das Resultat derselben ist, wenn wir

$$3\Theta' = \Delta\,(a_{11}\alpha'_{11} + a_{22}\alpha'_{22} + a_{33}\alpha'_{33} + 2a_{23}\alpha'_{23} + 2a_{31}\alpha'_{31} + 2a_{12}\alpha'_{12})$$

und

$$2F' = b'_{11}\alpha_1^2 + b'_{22}\alpha_2^2 + b'_{33}\alpha_3^2 + 2b'_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2b'_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2b'_{12}\alpha_1\alpha_2$$

setzen: Der Punkt $\Sigma' = 0$ hat mit dem Kegelschnitt zwei imaginäre, einen (zwei zusammenfallende) oder zwei reelle Punkte gemein, je nachdem Θ' negativ, Null oder positiv ist; sie sind durch die Gleichung

$$F' = 0$$

gegeben.

Ebenso wie nach der Beschaffenheit und Anzahl der auf der unendlich fernen Graden liegenden Punkte des Kegelschnitts die Kegelschnitte classificirt worden sind, kann man auch an die durch den endlich fernen Punkt gehenden Graden des Kegelschnitts eine Eintheilung der Kegelschnitte in verschiedene Klassen knüpfen. Der endlich ferne Punkt hat mit dem Kegelschnitt zwei imaginäre, eine oder zwei reelle Grade gemein, je nachdem die Grösse

$$\Delta\,(a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2a_{23} + 2a_{31} + 2a_{12})$$

negativ, Null oder positiv ist. Im ersten Falle besitzt der Kegelschnitt Eigenschaften, die den Eigenschaften der Ellipse dualistisch entsprechen, und die, wie diese von der festen unendlich fernen Graden, von der willkürlichen durch die Wahl des Fundamentaldreiecks bestimmten Lage des endlich fernen Punktes abhängen; man kann daher in diesem Falle den Kegelschnitt eine Ellipse in Bezug auf den endlich fernen Punkt oder kurz eine relative Ellipse und aus demselben Grunde in dem zweiten Falle eine relative Parabel und im dritten eine

relative Hyperbel nennen, vorausgesetzt, dass die Discriminante nicht Null ist. Ist sie Null, so ist sie in dem obigen Ausdrucke wegzulassen, und das Negativ-, Null- oder Positivsein desselben deutet dann an, dass der Kegelschnitt in zwei nicht parallele imaginäre, in zwei parallele oder in einen (zwei zusammenfallende) und in zwei nicht parallele reelle Punkte beziehungsweise degenerirt. Vor dieser Eintheilung der Kegelschnitte aber hat die erst gegebene ein wesentliches Moment voraus; bei jener geschieht nämlich offenbar die Classification in Rücksicht auf die Gestalt der Kegelschnitte, während bei dieser ihr nach dem Prinzip der Dualität entsprechenden nicht die Gestalt, sondern die Lage derselben in Bezug auf den nicht festen endlich fernen Punkt in Berücksichtigung kommt. Zur Erforschung der Eigenschaften der Kegelschnitte genügt die Rücksichtnahme auf eine Eintheilung, und so ziehen wir die so benannten relativen Kegelschnitte nicht in den Bereich unserer Untersuchungen.

Erwähnt sei nur, dass die den Kreisen dualistisch entsprechenden Curven, die relativen Kreise, zur Gattung der relativen Ellipse gehörig, sämmtlich mit dem endlich fernen Punkte die durch die Gleichung

$$\sigma_1^2\alpha_1^2 + \sigma_2^2\alpha_2^2 + \sigma_3^2\alpha_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3 \cos \mathcal{A}_1\alpha_2\alpha_3 \\ - 2\sigma_3\sigma_1 \cos \mathcal{A}_2\alpha_3\alpha_1 - 2\sigma_1\sigma_2 \cos \mathcal{A}_3\alpha_1\alpha_2 = 0$$

bestimmten imaginären Graden, auf welchen die auf sich selbst senkrechten Punkte liegen, — sie können die (endlich fernen) imaginären Kreislinien genannt werden — gemein haben. Es besteht zwischen ihnen und den imaginären Kreispunkten, wie aus den Gleichungen $F' = 0$ und $\Phi' = 0$ vermittelst der sechs Gleichungen 13. des 10. Abschnitts des ersten Theils sich ergiebt, die folgende Beziehung: Die imaginären Kreislinien sind die Verbindungslinien der imaginären Kreispunkte mit dem endlich fernen Punkte und die imaginären Kreispunkte die Durchschnittspunkte der imaginären Kreislinien mit der unendlich fernen Graden.

4. Aus dem vorigen Abschnitte erhellt, dass die Grade $|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3|$ mit dem Kegelschnitte nur einen Punkt, wenn ihre Coordinaten der Gleichung

$$\alpha_{11}\mathfrak{a}_1^2 + \alpha_{22}\mathfrak{a}_2^2 + \alpha_{33}\mathfrak{a}_3^2 + 2\alpha_{23}\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 + 2\alpha_{31}\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1 \\ + 2\alpha_{12}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = 0$$

genügen, und der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit ihm nur eine Grade gemein hat, wenn durch seine Coordinaten der Gleichung

$$a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 + 2a_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0$$

genügt wird; wir erkennen daraus, dass jede Grade des Kegelschnitts und nur eine solche mit ihm nur einen Punkt (zwei zusammenfallende Punkte) und jeder Punkt des Kegelschnitts und nur ein solcher mit ihm eine Grade (zwei zusammenfallende Grade) gemein hat. Erinnern wir daran, dass der Kegelschnitt durch die Gleichung

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$$

repräsentirt ist, wenn zwischen den Coordinaten die Gleichungen 1. und 2. bestehen, so erhellt, dass der zur Graden $|a_1, a_2, a_3|$ gehörige Punkt des Kegelschnitts durch die Form

$$4. \quad (\alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \alpha_{13}a_3,\ \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{23}a_3,\ \alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3)$$

und die zum Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ gehörige Grade des Kegelschnitts durch die Form

$$5. \quad |a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3,\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3,\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3|$$

dargestellt ist.

Es drängt sich hier die Frage auf, in welcher Beziehung der durch die Form 4. dargestellte Punkt zu der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ und die durch die Form 5. dargestellte Grade zu dem Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ steht, wenn diese Grade nicht eine Grade des Kegelschnitts und dieser Punkt nicht ein Punkt des Kegelschnitts ist. Wir erinnern uns, dass diese Beziehung im 19. Abschnitte des ersten Theiles als Polarreciprocität gekennzeichnet worden ist; der durch die Form 4. gegebene Punkt ist der Pol der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ und die durch die Form 5. gegebene Grade die Polare des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ in Bezug auf den Kegelschnitt. Die Antwort aber auf jene Frage giebt die folgende Betrachtung. Zwischen den Coordinaten der Graden $|a_1, a_2, a_3|$ und $|a'_1, a'_2, a'_3|$ besteht, wenn die erstere eine Grade des Kegelschnitts und die letztere eine Grade des zu ihr gehörigen Punktes des Kegelschnitts ist, die Relation

$$\alpha_{11}a_1a'_1 + \alpha_{22}a_2a'_2 + \alpha_{33}a_3a'_3 + \alpha_{23}(a_2a'_3 + a_3a'_2) + \alpha_{31}(a_3a'_1 + a_1a'_3) + \alpha_{12}(a_1a'_2 + a_2a'_1) = 0;$$

sie ist in Bezug auf ihre Coordinaten symmetrisch, und es stellt daher dieselbe Gleichung, welche für $|a_1, a_2, a_3|$ als eine Grade des Kegelschnitts den zu ihr gehörigen Punkt des Kegelschnitts repräsentirt, für $|a_1, a_2, a_3|$ als eine beliebige Grade einen Punkt dar, der der Durchschnittspunkt derjenigen Graden des Kegelschnitts ist, welche durch die beiden auf jener Graden liegenden Punkte des Kegelschnitts hindurchgehen. Es ist also der Pol einer Graden der Durchschnittspunkt der durch die auf ihr liegenden Punkte des Kegelschnitts gehenden Graden desselben, und zugleich erkennt man, worauf auch die entsprechende Betrachtung führt, die Polare eines Punktes ist die Verbindungslinie der auf den durch ihn gehenden Graden des Kegelschnitts liegenden Punkte desselben.

Der Pol einer Graden des Kegelschnitts ist der zu ihr gehörige Punkt desselben und die Polare eines Punktes des Kegelschnitts die zu ihm gehörige Grade desselben.

Je nachdem eine Grade mit dem Kegelschnitt zwei reelle, einen oder zwei imaginäre Punkte gemein hat, hat auch ihr Pol mit demselben zwei reelle, einen oder zwei imaginäre Grade gemein, und umgekehrt.

Die Formen des Pols und der Polare lassen ferner unmittelbar das Bestehen der folgenden Sätze erkennen:

Geht eine Grade durch den Pol einer andern Graden, so geht auch diese Grade durch den Pol jener Graden. Liegt ein Punkt auf der Polare eines andern Punktes, so liegt auch dieser Punkt auf der Polare jenes Punktes.

Der Pol einer Graden eines Punktes liegt hiernach auf der Polare dieses Punktes und die Polare eines Punktes einer Graden geht durch den Pol dieser Graden; wir können somit sagen:

Die Pole aller Graden eines Punktes liegen auf seiner Polare. Die Polaren aller Punkte einer Graden gehen durch ihren Pol.

und hieraus weiter sofort die folgenden Sätze entnehmen:

Die Polare eines Punktes ist der Ort der Durchschnittspunkte der zu den auf den Graden des Punktes liegenden Punkten des Kegelschnitts gehörigen Graden desselben. Der Pol einer Graden ist der Ort

6*

der Verbindungslinien der zu den durch die Punkte der Graden gehenden Graden des Kegelschnitts gehörigen Punkte desselben.

Ferner muss der Pol der durch die Pole zweier Graden gehenden Graden auf jeder von ihnen liegen, und die Polare des auf den Polaren zweier Punkte liegenden Punktes durch jeden von ihnen gehen, mit andern Worten:

Der Durchschnittspunkt zweier Graden ist der Pol der Verbindungslinie ihrer Pole. Die Verbindungslinie zweier Punkte ist die Polare des Durchschnittspunktes ihrer Polaren.

Endlich sagen wir:

Die Polare eines Punktes ist der Ort des zu den auf jeder Graden desselben liegenden Punkten des Kegelschnitts und ihm selbst gehörigen vierten harmonischen Punktes. Der Pol einer Graden ist der Ort der zu den durch jeden Punkt derselben gehenden Graden des Kegelschnitts und ihr selbst gehörigen vierten harmonischen Graden.

und erweisen diese Behauptung durch den nachstehenden Beweis des ersten Satzes: Es sei ein Punkt durch die Form $(\varkappa\alpha_1 + \varkappa'\alpha'_1, \varkappa\alpha_2 + \varkappa'\alpha'_2, \varkappa\alpha_3 + \varkappa'\alpha'_3)$ und die auf irgend einer Graden desselben liegenden Punkte des Kegelschnitts durch die Formen $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ dargestellt; es liegt dann in der That der Punkt $(\varkappa\alpha_1 - \varkappa'\alpha'_1, \varkappa\alpha_2 - \varkappa'\alpha'_2, \varkappa\alpha_3 - \varkappa'\alpha'_3)$ auf seiner Polare

$$|\varkappa (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3) + \varkappa' (a_{11}\alpha'_1 + a_{12}\alpha'_2 + a_{13}\alpha'_3), -----, -----|,$$

denn die Bedingung dafür ist die offenbar richtige Gleichung

$$\varkappa^2 (\alpha_1 (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3) + ---) - \varkappa'^2 (\alpha'_1 (a_{11}\alpha'_1 + a_{12}\alpha'_2 + a_{13}\alpha'_3) + ---) + \varkappa\varkappa' (\alpha_1 (a_{11}\alpha'_1 + a_{12}\alpha'_2 + a_{13}\alpha'_3) - \alpha'_1 (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3) + ---) = 0.$$

Diese beiden letzten Sätze sind von besonderer Wichtigkeit in der Theorie der Kegelschnitte, indem nämlich durch sie das Gebiet, auf dem die harmonischen und mit diesen zugleich die anharmonischen Punkte und Graden eine grosse Rolle spielen, eröffnet wird.

Ein jeder Punkt der Polare eines Punktes hat die Eigenschaft, dass dieser auf seiner Polare liegt, und eine jede Grade

des Pols einer Graden die Eigenschaft, dass diese durch ihren Pol geht. Es giebt demnach unendlich viele Paare von Punkten, von denen jeder auf der Polare des andern liegt, und von Graden, von denen jede durch den Pol der andern geht. Jede zwei solche Punkte sind in Bezug auf die auf ihrer Verbindungslinie liegenden Punkte des Kegelschnitts und jede zwei solche Grade in Bezug auf die durch ihren Durchschnittspunkt gehenden Graden des Kegelschnitts harmonisch conjugirt; wir nennen sie polar conjugirte Punkte und Grade in Bezug auf den Kegelschnitt. Auf jeder Graden liegen unendlich viele conjugirte Punkte und durch jeden Punkt gehen unendlich viele conjugirte Grade; die auf ihr liegenden Punkte des Kegelschnitts sind die harmonischen Hauptpunkte und die durch ihn gehenden Graden des Kegelschnitts die harmonischen Hauptlinien in Bezug auf den Kegelschnitt. Die Mittelpunkte einer jeden Graden in Bezug auf die harmonischen Hauptpunkte und die Winkelhalbirungslinien eines jeden Punktes in Bezug auf die harmonischen Hauptlinien fassen wir als die Hauptpunkte der Graden und die Hauptlinien des Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt auf. Dadurch sind dann auch die anharmonischen Hauptpunkte einer jeden Graden und die anharmonischen Hauptlinien eines jeden Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt bestimmt. Jede zwei polar conjugirte Punkte sind in Bezug auf die anharmonischen Hauptpunkte ihrer Verbindungslinie und jede zwei polar conjugirte Grade in Bezug auf die anharmonischen Hauptlinien ihres Durchschnittspunktes anharmonisch conjugirt. Wir bemerken, dass in Folge der im weiteren Verlaufe dieser Untersuchungen erhellenden Thatsache, dass die cyclischen Punkte einer jeden reellen Graden und die cyclischen Graden eines jeden reellen Punktes reell sind, die im 26. Abschnitte des ersten Theils gegebenen zwischen den cyclischen und parabolischen Punkten und Graden bestehenden Relationen, die wir andeutungsweise in der Form

$$\overline{MA}_1^2 + \overline{MA}_2^2 = 0, \quad \mathrm{tg}^2\, MA_1 + \mathrm{tg}^2\, MA_2 = 0$$

hierherstellen, darthun, dass auf jeder reellen Graden und durch jeden reellen Punkt entweder die harmonischen Hauptpunkte und -linien reell und die anharmonischen imaginär oder die harmonischen imaginär und die anharmonischen reell sind, so

dass also jede zwei polar conjugirte Punkte einer reellen Graden und Grade eines reellen Punktes harmonisch conjugirt in Bezug auf zwei reelle oder imaginäre Punkte und Grade (die harmonischen Hauptpunkte und -linien) und anharmonisch conjugirt sind in Bezug auf zwei imaginäre oder reelle Punkte und Grade (die anharmonischen Hauptpunkte und -linien), je nachdem die Grade und der Punkt mit dem Kegelschnitt zwei reelle oder imaginäre Punkte und resp. Grade gemein hat.

Da jede zwei Punkte und Grade, die in Bezug auf die harmonischen Hauptpunkte ihrer Verbindungslinie und die harmonischen Hauptlinien ihres Durchschnittspunktes harmonisch und also in Bezug auf die anharmonischen Hauptpunkte und -linien anharmonisch conjugirt sind, polar conjugirte Punkte und Grade in Bezug auf den Kegelschnitt heissen, so können füglich jede zwei Punkte und Grade, die in Bezug auf die harmonischen Hauptpunkte und -linien anharmonisch und also in Bezug auf die anharmonischen Hauptpunkte und -linien harmonisch conjugirt sind, die also die Eigenschaft haben, dass jeder von ihnen dem zu dem andern in Bezug auf die Hauptpunkte symmetrisch liegenden Punkte und beziehungsweise jede von ihnen der zu der andern in Bezug auf die Hauptlinien symmetrisch liegenden Graden polar conjugirt ist, als a p o l a r c o n j u g i r t in Bezug auf den Kegelschnitt bezeichnet werden. Natürlich ist die Apolarität von Punkten und Graden nicht von der Bedeutung der Polarität als der primitiveren, es erscheint aber als wichtig, dass, während jede zwei p o l a r conjugirte Punkte einer reellen Graden und Grade eines reellen Punktes nur dann, wenn auf ihr zwei r e e l l e Punkte des Kegelschnitts liegen und durch ihn zwei r e e l l e Grade des Kegelschnitts gehen, in Bezug auf zwei r e e l l e Punkte und Grade h a r m o n i s c h c o n j u g i r t sind, dies zwei a p o l a r conjugirte Punkte einer reellen Graden und Grade eines reellen Punktes im Gegentheil nur dann sind, wenn auf ihr zwei i m a g i n ä r e Punkte des Kegelschnitts liegen und durch ihn zwei i m a g i n ä r e Grade des Kegelschnitts gehen.

Die harmonischen Hauptpunkte und -linien sind apolar und die anharmonischen polar conjugirt; die Hauptpunkte und -linien sind polar und apolar conjugirt. Jeder harmonische Hauptpunkt und jede harmonische Hauptlinie ist sich selbst

polar conjugirt, dagegen jeder anharmonische Hauptpunkt und jede anharmonische Hauptlinie sich selbst apolar conjugirt. Da die harmonischen Hauptpunkte und -linien Punkte und Grade des Kegelschnitts sind, so ist also der Kegelschnitt der Ort der sich selbst polar conjugirten Punkte und Graden. Welches ist der Ort der sich selbst apolar conjugirten Punkte und Graden?

Die analytische Bedingung, die zwei polar conjugirte Punkte und Grade durch ihre Coordinaten erfüllen müssen, ergiebt sich sofort aus der Definition und den Formen von Pol und Polare. Zwei Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ sind polar conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt, wenn zwischen ihren Coordinaten die Relation

$$a_{11}\alpha_1\alpha'_1 + a_{22}\alpha_2\alpha'_2 + a_{33}\alpha_3\alpha'_3 + a_{23}(\alpha_2\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_2) + a_{31}(\alpha_3\alpha'_1 + \alpha_1\alpha'_3) + a_{12}(\alpha_1\alpha'_2 + \alpha_2\alpha'_1) = 0$$

besteht, und zwei Grade $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_1|$ sind polar conjugirte Grade in Bezug auf den Kegelschnitt, wenn ihre Coordinaten der Gleichung

$$\alpha_{11}a_1a'_1 + \alpha_{22}a_2a'_2 + \alpha_{33}a_3a'_3 + \alpha_{23}(a_2a'_3 + a_3a'_2) + \alpha_{31}(a_3a'_1 + a_1a'_3) + \alpha_{12}(a_1a'_2 + a_2a'_1) = 0$$

genügen. Oder kurz: Die durch die Gleichungen $\Sigma' = 0$ und $S' = 0$ gegebenen Punkte und Graden sind in Bezug auf den Kegelschnitt polar conjugirt, wenn beziehungsweise $\Theta' = 0$ und $\Theta' = 0$ ist.

Die Verbindungslinie von je zweien der zu vier Punkten des Kegelschnitts gehörigen drei Diagonalpunkte ist die Polare des dritten, da sie auf den durch diesen und jene vier Punkte gehenden zwei Graden die zu ihnen gehörigen vierten harmonischen Punkte bestimmt. Es haben demnach die zu vier Punkten des Kegelschnitts gehörigen drei Diagonalpunkte und deren Verbindungslinien die Eigenschaft, dass je zwei von ihnen in Bezug auf den Kegelschnitt polar conjugirt sind, und ebenso sind die zu vier Graden des Kegelschnitts gehörigen drei Diagonallinien und deren Durchschnittspunkte von gleicher Beschaffenheit. Wir nennen drei solche Punkte und Grade ein Tripel von polar conjugirten Punkten und Graden und das durch sie bestimmte Dreieck ein sich selbst polar conjugirtes Dreieck. Das zu vier Punkten oder

Graden des Kegelschnitts gehörige, durch die zu ihnen gehörigen Diagonalpunkte und resp. -linien gebildete sogenannte Diagonaldreieck ist ein sich selbst polar conjugirtes Dreieck und seine Eckpunkte und Seitenlinien Tripel von polar conjugirten Punkten und Graden.

Hinsichtlich der Degeneration des Kegelschnitts in zwei Grade oder zwei Punkte ist Folgendes zu bemerken. Im ersten Ausnahmefalle gehen die Graden, die mit dem Kegelschnitt nur einen Punkt gemein haben, — man kann sie füglich als Grade des Kegelschnitts bezeichnen — durch den Durchschnittspunkt der Graden, in die er degenerirt. Für die Graden des Kegelschnitts $|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3|$, zu denen auch die ihn bildenden Graden gehören, bestehen daher die Relationen

$$\alpha_{11}\mathfrak{a}_1 + \alpha_{12}\mathfrak{a}_2 + \alpha_{13}\mathfrak{a}_3 = 0, \quad \alpha_{21}\mathfrak{a}_1 + \alpha_{22}\mathfrak{a}_2 + \alpha_{23}\mathfrak{a}_3 = 0,$$
$$\alpha_{31}\mathfrak{a}_1 + \alpha_{32}\mathfrak{a}_2 + \alpha_{33}\mathfrak{a}_3 = 0,$$

ebenso wie für ihren Durchschnittspunkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ offenbar

$$\mathfrak{a}_{11}\alpha_1 + \mathfrak{a}_{12}\alpha_2 + \mathfrak{a}_{13}\alpha_3 = 0, \quad \mathfrak{a}_{21}\alpha_1 + \mathfrak{a}_{22}\alpha_2 + \mathfrak{a}_{23}\alpha_3 = 0,$$
$$\mathfrak{a}_{31}\alpha_1 + \mathfrak{a}_{32}\alpha_2 + \mathfrak{a}_{33}\alpha_3 = 0$$

ist. In Folge dessen kann als Pol einer Graden des Kegelschnitts jeder Punkt und als Polare ihres Durchschnittspunktes jede Grade gelten. Der Pol einer jeden andern Graden ist jener Durchschnittspunkt und die Polare eines jeden andern Punktes eine Grade des Kegelschnitts, der Ort des zu den auf einer Graden des Punktes liegenden Punkten des Kegelschnitts und ihm selbst gehörigen vierten harmonischen Punktes. Ebenso kann im zweiten Ausnahmefalle als Polare eines Punktes des Kegelschnitts d. i. eines jeden Punktes der Verbindungslinie der den Kegelschnitt bildenden Punkte jede Grade und als Pol dieser Verbindungslinie jeder Punkt gelten. Die Polare eines jeden andern Punktes ist jene Verbindungslinie und der Pol einer jeden andern Graden ein Punkt des Kegelschnitts, der Ort der zu den durch einen Punkt der Graden gehenden Graden des Kegelschnitts und ihr selbst gehörigen vierten harmonischen Graden.

Im Falle der Degeneration des Kegelschnitts in eine Grade oder in einen Punkt ist diese Grade die Polare jedes nicht auf ihr liegenden Punktes und dieser Punkt der Pol jeder nicht durch ihn gehenden Graden, sonst können als Polare eines

Punktes und als Pol einer Graden jede Grade und jeder Punkt gelten.

5. Der Pol der unendlich fernen Graden ist

$(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}, \ \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}, \ \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})$;

wir bezeichnen ihn kurz, indem wir

$$\varDelta\grave{\alpha}_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}, \ \varDelta\grave{\alpha}_2 = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}, \ \varDelta\grave{\alpha}_3 = \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33}$$

setzen, durch die Form

$$(\grave{\alpha}_1, \grave{\alpha}_2, \grave{\alpha}_3)$$

und nennen ihn das Centrum des Kegelschnitts. Die Polaren der auf der unendlich fernen Graden liegenden Punkte gehen durch das Centrum; wir nennen sie Diametrallinien (Durchmesser). Im Falle der Parabel sind sie parallel, denn das Centrum der Parabel liegt auf der unendlich fernen Graden, da diese wegen $\varDelta = 0$ eine Grade der Parabel ist.

Da der Pol einer jeden Diametrallinie auf der unendlich fernen Graden liegt, so ist er einer der cyclischen Punkte aller der Diametrallinie in Bezug auf den Kegelschnitt polar conjugirten offenbar einander parallelen Graden und demzufolge, da die cyclischen Punkte einer Graden in Bezug auf den Kegelschnitt polar conjugirt sind, die Diametrallinie als Polare jenes cyclischen Punktes der Ort des andern cyclischen Punktes jener Graden. Eine jede Diametrallinie ist also der Ort der (inneren) Mittelpunkte der ihr polar conjugirten Graden, und umgekehrt der Ort der (inneren) Mittelpunkte paralleler Graden in Bezug auf den Kegelschnitt ist die ihnen polar conjugirte Diametrallinie.

Zu den einer Diametrallinie polar conjugirten Graden gehört stets auch eine Diametrallinie. Es ergeben sich daraus die folgenden Sätze:

Das Centrum des Kegelschnitts ist der Mittelpunkt aller Diametrallinien.

Jede zwei polar conjugirte Diametrallinien, die offenbar mit der unendlich fernen Graden ein Tripel polar conjugirter Graden sind, sind wechselseitig den ihnen polar conjugirten Graden parallel.

Aus dem letzteren folgt insbesondere, dass die durch die

auf einer Diametrallinie liegenden Punkte des Kegelschnitts gehenden Graden desselben der ihr polar conjugirten Diametrallinie parallel sind.

Was die Bedeutung des Punktes

$$(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}, \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}, \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})$$

in den Ausnahmefällen anlangt, so ist er im Falle der Degeneration des Kegelschnitts in zwei Grade der Durchschnittspunkt derselben und im Falle der Degeneration in zwei Punkte der in Bezug auf sie innere Mittelpunkt ihrer Verbindungslinie.

6. Die Gleichung des Pols einer Graden d. i. des Ortes der Polaren aller ihrer Punkte geht aus ihrer Gleichung vermittelst der Substitutionsgleichungen

$$6. \quad \begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \alpha_{13}a_3 \\ \Delta\alpha_2 &= \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{23}a_3 \\ \Delta\alpha_3 &= \alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3 \end{aligned}$$

und die Gleichung der Polare eines Punktes d. i. des Ortes der Pole aller seiner Graden aus seiner Gleichung vermittelst der Substitutionsgleichungen

$$7. \quad \begin{aligned} \Delta a_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 \\ \Delta a_2 &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 \\ \Delta a_3 &= a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3, \end{aligned}$$

in denen im Falle der Degeneration die Discriminante wegzulassen ist, hervor, denn, da z. B. die Coordinaten der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ einer Graden $|a'_1, a'_2, a'_3|$ und deren Polaren $|a_1, a_2, a_3|$ durch die Gleichungen 6. mit einander verknüpft sind, so gilt die Gleichung $a'_1\alpha_1 + a'_2\alpha_2 + a'_3\alpha_3 = 0$ auch dann, wenn an die Stelle der α die durch jene Gleichungen gegebenen ihnen gleichen Ausdrücke treten.

In gleicher Weise stellt die Gleichung, die vermittelst der Substitutionsgleichungen 6. aus der Gleichung des Kegelschnitts $S' = 0$ hervorgeht, den Ort der Polaren aller seiner Punkte und die Gleichung, die vermittelst der Substitutionsgleichungen 7. aus der Gleichung des Kegelschnitts $\Sigma' = 0$ hervorgeht, den Ort der Pole aller seiner Graden dar. In beiden Fällen ist der Ort, da die Gleichungen homogene Gleichungen zweiten Grades bleiben, ein Kegelschnitt; er ist die Polarcurve im ersten Falle des Kegelschnitts $S' = 0$ und im zweiten des Kegel-

schnitts $\Sigma'=0$ und wird von uns beziehungsweise durch $\Sigma'_0=0$ und $S'_0=0$ bezeichnet, indem wir

$$\Sigma'_0 = \alpha'_{11_0}a_1^2 + \alpha'_{22_0}a_2^2 + \alpha'_{33_0}a_3^2 + 2\alpha'_{23_0}a_2a_3 + 2\alpha'_{31_0}a_3a_1 + 2\alpha'_{12_0}a_1a_2$$

annehmen und hierin die Coefficienten durch die Gleichungen

$$\Delta^2\alpha'_{11_0} = a'_{11}\alpha_{11}^2 + a'_{22}\alpha_{12}^2 + a'_{33}\alpha_{13}^2 + 2a'_{23}\alpha_{12}\alpha_{13} + 2a'_{31}\alpha_{13}\alpha_{11} + 2a'_{12}\alpha_{11}\alpha_{12}$$

$$\Delta^2\alpha'_{22_0} = a'_{11}\alpha_{21}^2 + a'_{22}\alpha_{22}^2 + a'_{33}\alpha_{23}^2 + 2a'_{23}\alpha_{22}\alpha_{23} + 2a'_{31}\alpha_{23}\alpha_{21} + 2a'_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}$$

$$\Delta^2\alpha'_{33_0} = a'_{11}\alpha_{31}^2 + a'_{22}\alpha_{32}^2 + a'_{33}\alpha_{33}^2 + 2a'_{23}\alpha_{32}\alpha_{33} + 2a'_{31}\alpha_{33}\alpha_{31} + 2a'_{12}\alpha_{31}\alpha_{32}$$

$$\Delta^2\alpha'_{23_0} = a'_{11}\alpha_{21}\alpha_{31} + a'_{22}\alpha_{22}\alpha_{32} + a'_{33}\alpha_{23}\alpha_{33} + a'_{23}(\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{23}^2) + a'_{31}(\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{33}) + a'_{12}(\alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{22}\alpha_{31})$$

$$\Delta^2\alpha'_{31_0} = a'_{11}\alpha_{31}\alpha_{11} + a'_{22}\alpha_{32}\alpha_{12} + a'_{33}\alpha_{33}\alpha_{13} + a'_{23}(\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{33}\alpha_{12}) + a'_{31}(\alpha_{33}\alpha_{11} + \alpha_{31}^2) + a'_{12}(\alpha_{31}\alpha_{12} + \alpha_{32}\alpha_{11})$$

$$\Delta^2\alpha'_{12_0} = a'_{11}\alpha_{11}\alpha_{21} + a'_{22}\alpha_{12}\alpha_{22} + a'_{33}\alpha_{13}\alpha_{23} + a'_{23}(\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{22}) + a'_{31}(\alpha_{13}\alpha_{21} + \alpha_{11}\alpha_{23}) + a'_{12}(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}^2)$$

bestimmen und im andern Falle in analoger Weise verfahren. Wir bemerken, dass dann die Gleichung $\Delta^2 S'=0$ — in dieser Form! — vermittelst der Substitutionsgleichungen 6. in die Gleichung $\Delta^2\Sigma'_0=0$ und die Gleichung $\Delta^2\Sigma'=0$ vermittelst der Substitutionsgleichungen 7. in die Gleichung $\Delta^2 S'_0=0$, wo im Falle der Degeneration des Kegelschnitts natürlich das Δ^2 fortbleibt, und offenbar ausser im Falle der Degeneration des Kegelschnitts die Gleichung $\Delta^2\Sigma'_0=0$ vermittelst der Substitutionsgleichungen 7. in die Gleichung $\Delta^2 S'=0$ und die Gleichung $\Delta^2 S'_0=0$ vermittelst der Substitutionsgleichungen 6. in die Gleichung $\Delta^2\Sigma'=0$ übergeht.

Die Polarcurve eines in Punkt- durch die Gleichung $S'=0$ und in Liniencoordinaten durch die Gleichung $\Sigma'=0$ dargestellten Kegelschnitts ist durch die Gleichung $\Sigma'_0=0$ in Linien- und in Punktcoordinaten durch die Gleichung $S'_0=0$ gegeben. Repräsentirt $S'=0$ zwei Grade und $\Sigma'=0$ ihren Durch-

schnittspunkt, so giebt $\Sigma'_0 = 0$ ihre Pole und $S'_0 = 0$ seine Polare, und stellt $\Sigma' = 0$ zwei Punkte und $S' = 0$ ihre Verbindungslinie dar, so giebt $S'_0 = 0$ ihre Polaren und $\Sigma'_0 = 0$ ihren Pol. Im Falle endlich der Degeneration des Kegelschnitts $S' = 0$ in eine Grade ist $\Sigma'_0 = 0$ ihr Pol und der Degeneration des Kegelschnitts $\Sigma' = 0$ in einen Punkt ist $S'_0 = 0$ seine Polare. Vorausgesetzt ist jedoch hierbei die Nichtdegeneration des Kegelschnitts $S = 0$ oder $\Sigma = 0$, welcher Fall in dieser Beziehung nur allein in der Folge in Betracht kommt.

7. Unter β'_{11}, β'_{23}, --- wie immer die im 3. Abschnitte eingeführten Coefficienten verstanden, findet man leicht die — nur für den Fall der Degeneration des Kegelschnitts $S = 0$ nicht geltenden — Relationen

$$\Delta^2\beta'_{11} = \Delta^3\alpha'_{11_0} - 3\Theta'\alpha_{11},\ \Delta^2\beta'_{23} = \Delta^3\alpha'_{23_0} - 3\Theta'\alpha_{23}, \text{ u. s. f.}$$

und damit die Gleichung

$$2\Delta^2\Phi' = \Delta^3\Sigma'_0 - 3\Theta'\Sigma.$$

Es sind demnach die auf der Graden $S' = 0$ liegenden Punkte des Kegelschnitts $S = 0$ auch durch die Gleichung

$$8. \qquad \Delta^3\Sigma'_0 - 3\Theta'\Sigma = 0$$

gegeben; sie erscheinen in dieser Form als Punkte, durch die die dem Kegelschnitt und dem Pole der Graden gemeinschaftlichen Graden hindurchgehen; denn eine Gleichung von der Form $\varkappa\Sigma + \varkappa'\Sigma' = 0$ stellt einen Kegelschnitt, dem die den Kegelschnitten $\Sigma = 0$ und $\Sigma' = 0$ gemeinschaftlichen Graden angehören und — wir setzen gleich dazu — eine Gleichung von der Form $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ einen Kegelschnitt dar, dem die den Kegelschnitten $S = 0$ und $S' = 0$ gemeinschaftlichen Punkte angehören, da diejenigen Punkte und Graden, deren Coordinaten den Gleichungen $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$; $S = 0$, $S' = 0$ zu gleicher Zeit genügen, auch die Gleichungen $\varkappa\Sigma + \varkappa'\Sigma' = 0$, $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ durch ihre Coordinaten erfüllen. Aus ihr ergiebt sich mit Rücksicht auf den vorigen Abschnitt, dass ihre Polaren, die durch die auf der Graden $S' = 0$ liegenden Punkte des Kegelschnitts gehenden Graden desselben, durch die Gleichung

$$9. \qquad \Delta^3 S' - 3\Theta' S = 0$$

gegeben sind.

In gleicher Weise ist ausser im Falle der Degeneration des Kegelschnitts $\Sigma = 0$

$$2\Delta^2 F' = \Delta^3 S'_0 - 3\Theta' S$$

und darum

$$\Delta^3 S'_0 - 3\Theta' S = 0 \qquad 10.$$

die Gleichung der durch den Punkt $\Sigma' = 0$ gehenden Graden des Kegelschnitts $\Sigma = 0$ und

$$\Delta^3 \Sigma' - 3\Theta' \Sigma = 0 \qquad 11.$$

die Gleichung der auf den durch den Punkt $\Sigma' = 0$ gehenden Graden des Kegelschnitts liegenden Punkte desselben.

Wenn der Punkt $\Sigma' = 0$ der Pol der Graden $S' = 0$ und also die Grade $S' = 0$ die Polare des Punktes $\Sigma' = 0$ ist, so stellen übrigens die Gleichungen 8. und 11., 9. und 10. dasselbe dar, und es ist somit in diesem Falle

$$\Theta' = \boldsymbol{\Theta}'.$$

Stellen wir die unendlich ferne Grade durch die Gleichung $\mathbf{R} = 0$ dar, indem wir

$$\mathbf{R} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_3\alpha_1 + 2\alpha_1\alpha_2$$

annehmen, so ergiebt sich nach dem vorigen Abschnitt als die Gleichung ihres Pols d. i. des Centrums die Gleichung $\boldsymbol{P} = 0$, wofern wir $\dot{\alpha}_{11} = \dot{\alpha}_1^2$, $\dot{\alpha}_{23} = \dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3$, u. s. f. und

$$\boldsymbol{P} = \dot{\alpha}_{11}a_1^2 + \dot{\alpha}_{22}a_2^2 + \dot{\alpha}_{33}a_3^2 + 2\dot{\alpha}_{23}a_2a_3 + 2\dot{\alpha}_{31}a_3a_1 + 2\dot{\alpha}_{12}a_1a_2$$

setzen. Es bestehen alsdann, wenn

$$\boldsymbol{\Gamma} = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2 - (\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)\, a_2a_3 - (\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2)\, a_3a_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)\, a_1a_2$$

gesetzt wird und also die Gleichung $\boldsymbol{\Gamma} = 0$ die auf der unendlich fernen Graden liegenden Punkte des Kegelschnitts darstellt und ferner die Gleichung $\mathbf{G} = 0$ die Gleichung der zu ihnen gehörigen Graden des Kegelschnitts ist, die Relationen

$$\Delta^2 \boldsymbol{\Gamma} = \Delta^3 \boldsymbol{P} - \Delta\Sigma, \quad \Delta^2 \mathbf{G} = \Delta^3 \mathbf{R} - \Delta S; \qquad 12.$$

aus ihnen erhellt, dass die auf der unendlich fernen Graden liegenden Punkte des Kegelschnitts auch durch die Gleichung

$$\Delta^3 \boldsymbol{P} - \Delta\Sigma = 0$$

und die zu ihnen gehörigen Graden des Kegelschnitts — die harmonischen Hauptdiametrallinien (Asymptoten) — durch die Gleichung

$$\Delta^3 \mathbf{R} - \Delta S = 0$$

dargestellt sind.

Die Beschaffenheit und Anzahl der harmonischen Hauptdiametrallinien richtet sich natürlich nach derjenigen der zu ihnen gehörigen Punkte des Kegelschnitts. *Die Ellipse hat zwei imaginäre, die Parabel zwei mit der unendlich fernen Graden zusammenfallende und die Hyperbel zwei reelle harmonische Hauptdiametrallinien.*

Eine Eigenschaft dieser Graden ist die folgende: *Der innere Mittelpunkt einer jeden Graden in Bezug auf die auf ihr liegenden Punkte des Kegelschnitts ist zugleich ihr innerer Mittelpunkt in Bezug auf die auf ihr liegenden Punkte der harmonischen Hauptdiametrallinien*; denn die durch ihn und den unendlich fernen Punkt der Graden gehenden Diametrallinien sind in Bezug auf den Kegelschnitt polar und somit harmonisch conjugirt in Bezug auf die harmonischen Hauptdiametrallinien. *Insbesondere bestimmt* daher *jede Grade des Kegelschnitts auf den harmonischen Hauptdiametrallinien zwei Punkte, die von dem ihr zugehörigen Punkte des Kegelschnitts gleich weit entfernt sind.*

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, dass in Folge der Gleichungen 12. der Kegelschnitt ausser im Falle der Parabel in den Formen

$$\varDelta \boldsymbol{P} - \boldsymbol{\varGamma} = 0, \quad \varDelta \mathbf{R} - \mathbf{G} = 0$$

darstellbar ist. Insbesondere ist, wenn wir,

$$\boldsymbol{\Sigma} = s_1^2 a_1^2 + s_2^2 a_2^2 + s_3^2 a_3^2 - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 \\ - 2 s_3 s_1 \cos A_2 a_3 a_1 - 2 s_1 s_2 \cos A_3 a_1 a_2$$

setzend, die imaginären Kreispunkte durch die Gleichung $\boldsymbol{\Sigma} = 0$ repräsentiren, wegen $\boldsymbol{\varGamma} = \lambda \boldsymbol{\Sigma}$ der Kreis durch die Gleichung

$$\varDelta \boldsymbol{P} - \lambda \boldsymbol{\Sigma} = 0$$

darstellbar; es erhellt daraus, dass durch die Gleichung

$$\varkappa \varSigma + \varkappa' \boldsymbol{\Sigma} = 0,$$

wenn $\varSigma = 0$ die Gleichung eines nicht auf der unendlich fernen Graden liegenden Punktes ist, im Allgemeinen ein Kreis, dessen Centrum dieser Punkt ist, für $\varkappa = 0$ die imaginären Kreispunkte und für $\varkappa' = 0$ ein Punkt dargestellt wird; im Falle der Punkt $\varSigma = 0$ auf der unendlich fernen Graden liegt, repräsentirt sie, wie weiter erhellen wird, einen oder zwei Punkte derselben.

8. Ein Rückblick auf die im ersten Theile gegebenen Grundformeln der analytischen Geometrie lässt die merkwürdige Stellung erkennen, welche die imaginären Kreispunkte und Kreislinien in derselben einnehmen. Von den imaginären Kreispunkten und den imaginären Kreislinien und neben ihnen von der unendlich fernen Graden als ihrer Verbindungslinie und dem endlich fernen Punkte als ihrem Durchschnittspunkte erscheint als abhängig die gesammte Metrik der geometrischen Gebilde; sie ist eine absolut feste, soweit sie von den imaginären Kreispunkten, welche als die Punkte, durch welche alle Kreise hindurchgehen, in der Ebene fest liegen, dagegen nur eine relativ feste, soweit sie von den in der Ebene nur relativ festliegenden, weil von der Wahl des Fundamentaldreiecks abhängigen imaginären Kreislinien abhängt.

Wir geben als für die Folge nothwendig diese Formeln neben einigen andern aus ihnen abgeleiteten in einer diese Abhängigkeit der Metrik von den imaginären Kreispunkten — die imaginären Kreislinien ziehen wir nicht weiter in den Bereich unserer Betrachtung — so recht zur Anschauung bringenden Form. Wir schicken dazu als bei der Herleitung derselben aus dem ersten Theile zu beachten voraus, dass, wenn

$$a_{11} = a_1 a'_1, \; 2a_{23} = a_2 a'_3 + a_3 a'_2, \text{ u. s. f.}$$

angenommen wird,

$$4\alpha_{11} = (a_2 a'_3 - a_3 a'_2)^2,$$
$$4\alpha_{23} = (a_3 a'_1 - a_1 a'_3)(a_1 a'_2 - a_2 a'_1), \text{ u. s. f.}$$

ist, und weiter dass die Relation

$$(\alpha_{11} a_1 a'_1 + \cdots + \alpha_{23}(a_2 a'_3 + a_3 a'_2) + \cdots)^2 =$$
$$(\alpha_{11} a_1^2 + \cdots + 2\alpha_{23} a_2 a_3 + \cdots)(\alpha_{11} a'^2_1 + \cdots + 2\alpha_{23} a'_2 a'_3 + \cdots)$$
$$- \Delta (a_{11}(a_2 a'_3 - a_3 a'_2)^2 + \cdots$$
$$+ 2a_{23}(a_3 a'_1 - a_1 a'_3)(a_1 a'_2 - a_2 a'_1) + \cdots)$$

und als specieller Fall derselben die schon im ersten Theile gegebene Relation

$$(s_1^2 a_1 a'_1 + \cdots - s_2 s_3 \cos A_1 (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) - \cdots)^2 =$$
$$(s_1^2 a_1^2 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_2 a_3 - \cdots).$$
$$(s_1^2 a'^2_1 + \cdots - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a'_2 a'_3 - \cdots)$$
$$- 4J^2 (a_2 a'_3 - a_3 a'_2 + \cdots)^2$$

besteht, und bemerken endlich, dass z. B. durch das Zeichen

Σ'_a die Substitution der Coefficienten a_{11}, a_{23} --- der Gleichung $S = 0$ an Stelle von a_1^2, a_2a_3, --- in der Gleichung $\Sigma' = 0$ angedeutet werden soll. Die Formeln sind in den folgenden Sätzen enthalten:

Die von den zwei Graden $S = 0$ gebildeten Winkel sind, wenn die ihren Durchschnittspunkt darstellende Gleichung $\Sigma = 0$ der Gleichung $S = 0$ zugeordnet ist, durch die Gleichung

$$\Sigma_a^2 \mathrm{tg}^2 \varphi = 16 J^2 \mathbf{R}_\alpha$$

gegeben.

Die Graden $S = 0$ sind parallel, wenn $\mathbf{R}_\alpha = 0$ oder ihr Durchschnittspunkt ein Punkt der unendlich fernen Graden ist.

Die Graden $S = 0$ sind zu einander senkrecht, wenn $\Sigma_a = 0$ oder entwickelt

$$s_1^2 a_{11} + s_2^2 a_{22} + s_3^2 a_{33} - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_{23} - 2 s_3 s_1 \cos A_2 a_{31} - 2 s_1 s_2 \cos A_3 a_{12} = 0$$

ist d. h. wenn sie polar conjugirt sind in Bezug auf die imaginären Kreispunkte. Der Orthogonalpunkt einer Graden ist ihr Pol in Bezug auf sie.

Die Entfernung der zwei Punkte $\Sigma = 0$ von einander ist, wenn die ihre Verbindungslinie darstellende Gleichung $S = 0$ der Gleichung $\Sigma = 0$ zugeordnet ist, durch die Gleichung

$$13. \qquad \mathbf{R}_\alpha^2 \delta^2 = 4 \Sigma_a$$

gegeben.

Den senkrechten Abstand des Punktes $\Sigma = 0$ von der Graden $S = 0$ giebt die Gleichung

$$14. \qquad \mathbf{R}_\alpha \Sigma_a \mu^2 = 4 J^2 \Sigma_a = 4 J^2 S_\alpha.$$

Das Product der senkrechten Quadratabstände der Punkte $\Sigma = 0$ von der Graden $S = 0$ ist durch die Gleichung

$$\mathbf{R}_\alpha^2 \Sigma_a^2 \mu^2 \mu'^2 = 16 J^4 \Sigma_a^2 = 16 J^4 S_\alpha^2$$

bestimmt.

Das Product der senkrechten Quadratabstände des Punktes $\Sigma = 0$ von den Graden $S' = 0$ giebt, wenn die ihren Durchschnittspunkt darstellende Gleichung $\Sigma' = 0$ der Gleichung $S' = 0$ zugeordnet ist, die Gleichung

$$15. \quad \mathbf{R}_\alpha^2 (\Sigma_{a'}^2 + 16 J^2 \mathbf{R}_{\alpha'}) \mu^2 \mu'^2 = 16 J^4 \Sigma_{a'}^2 = 16 J^4 S_{\alpha'}'^2.$$

9. Die Polaren der imaginären Kreispunkte $\Sigma = 0$ geben

wir durch die Gleichung $\mathbf{S} = 0$ oder in entwickelter Form durch die Gleichung

$$\mathbf{S}_1^2\alpha_1^2 + \mathbf{S}_2^2\alpha_2^2 + \mathbf{S}_3^2\alpha_3^2 - 2\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3 \cos \mathbf{A}_1\alpha_2\alpha_3$$
$$- 2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_1 \cos \mathbf{A}_2\alpha_3\alpha_1 - 2\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 \cos \mathbf{A}_3\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

die wir als so beschaffen annehmen, dass die Ausdrücke $\Delta^2\mathbf{\Sigma}$ und $\Delta^2\mathbf{S}$ durch die Substitutionsgleichungen 7. und 6. des 6. Abschnitts in einander übergehen. Die Coefficienten derselben stehen in einer durch ihre Form angedeuteten leicht erkennbaren Beziehung zu dem durch die Pole und Polaren der Seitenlinien und Eckpunkte des Fundamentaldreiecks

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}), (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$$
$$|a_{11}, a_{12}, a_{13}|, |a_{21}, a_{22}, a_{23}|, |a_{31}, a_{32}, a_{33}|$$

bestimmten Dreieck. Dieses Dreieck und das Fundamentaldreieck sind sogenannte in Bezug auf den Kegelschnitt einander polar conjugirte Dreiecke; die Seitenlinien und Eckpunkte des einen sind die Polaren und Pole der entsprechenden Eckpunkte und Seitenlinien des andern. Mit Rücksicht auf den 14. Abschnitt des ersten Theils ersieht man aus den obigen Formen sofort, dass zwei solche polar conjugirten Dreiecke einen Collineationspunkt und eine Collineationslinie haben. In dem gegenwärtigen Falle sind deren Formen $\left(\frac{1}{\alpha_{23}}, \frac{1}{\alpha_{31}}, \frac{1}{\alpha_{12}}\right)$ und $\left|\frac{1}{a_{23}}, \frac{1}{a_{31}}, \frac{1}{a_{12}}\right|$.

10. Auf Grund der Eigenschaft der Gleichungen eines Kegelschnitts und seiner Polarcurve, dass die Ausdrücke $\Delta^2 S'$, $\Delta^2\Sigma'_0$ und $\Delta^2\Sigma'$, $\Delta^2 S'_0$ durch die Substitutionsgleichungen 6. und 7. in einander übergehen, lassen sich ohne Weiteres aus den im 8. Abschnitte gegebenen Sätzen diesen polar entsprechende entnehmen. So führt, um ein Beispiel anzuführen, der Satz 14. auf den Satz:

Den senkrechten Abstand des Pols der Graden $S' = 0$ von der Polare des Punktes $\Sigma' = 0$ giebt die Gleichung

$$\boldsymbol{P}_{a'}\mathbf{S}_{\alpha'}\mu^2 = 4J^2 S'_{\alpha'} = 4J^2\Sigma'_{a'}. \qquad 16.$$

Uebrigens ergiebt sich aus diesen beiden Sätzen unmittelbar, dass der senkrechte Abstand des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ von seiner Polare $|a_1, a_2, a_3|$ durch die Gleichung

$$\Delta^2\mathbf{R}\mathbf{S}\mu^2 = 4J^2S^2 \text{ oder } \Delta^2\boldsymbol{P}\mathbf{\Sigma}\mu^2 = 4J^2\Sigma^2$$

gegeben ist; es folgt daraus: Alle Punkte, die von ihren Po-

laren einen und denselben Abstand haben, liegen auf einer — nach der Gleichung so benannten — Curve vierten Grades, und alle Graden, von denen ihre Pole denselben Abstand haben, umhüllen eine solche.

11. Repräsentiren wir die Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ durch die Gleichungen $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$, so sind die in Bezug auf sie harmonisch conjugirten Punkte $(\varkappa, \varkappa')$, $(\varkappa, -\varkappa')$ offenbar durch die Gleichung $\varkappa^2\Sigma - \varkappa'^2\Sigma' = 0$ dargestellt. Jede zwei in Bezug auf die Punkte $\Sigma=0$, $\Sigma'=0$ harmonisch conjugirte Punkte stellt daher die Gleichung $\varkappa\Sigma + \varkappa'\Sigma' = 0$ und ebenso jede zwei in Bezug auf die Graden $S=0$, $S'=0$ harmonisch conjugirte Grade die Gleichung $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ dar.

Sind $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ die Gleichungen je zweier Punkte einer Graden, so können diese durch die Formen

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3); (\varkappa, \varkappa'), (\lambda, \lambda')$$

gegeben und demnach

$$\Sigma' = \varkappa\lambda(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3)^2 + \varkappa'\lambda'(\alpha'_1 a_1 + \alpha'_2 a_2 + \alpha'_3 a_3)^2 + (\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa')\Sigma$$

gesetzt und ebenso, wenn

$$(\mu, \mu'), (\nu, \nu')$$

zwei andere Punkte derselben Graden sind, diese durch die Gleichung

$$\mu\nu(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3)^2 + \mu'\nu'(\alpha'_1 a_1 + \alpha'_2 a_2 + \alpha'_3 a_3)^2 + (\mu\nu' + \nu\mu')\Sigma = 0$$

dargestellt werden; daraus aber ist sofort zu ersehen, dass diese beiden Punkte nur dann durch eine Gleichung von der Form $\varkappa\Sigma + \varkappa'\Sigma' = 0$ darstellbar sind, wenn

$$\frac{\varkappa\lambda}{\varkappa'\lambda'} = \frac{\mu\nu}{\mu'\nu'}$$

ist d. h. nach der Formel 20. des 26. Abschnitts des ersten Theiles, wenn die in Rede stehenden Punkte sechs Punkte in Involution sind. Wenn also die Gleichungen $\Sigma=0$, $\Sigma'=0$ je zwei Punkte einer Graden darstellen, so sind durch sie und die Gleichung $\varkappa\Sigma + \varkappa'\Sigma' = 0$ sechs Punkte in Involution, und ebenso wenn die Gleichungen $S = 0$, $S' = 0$ je zwei Grade eines Punktes

darstellen, durch sie und die Gleichung $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ sechs Grade in Involution gegeben.

In dem besondern Falle, dass die Gleichung $\Sigma' = 0$ einen oder zwei zusammenfallende Punkte darstellt, kann der obigen Bedingungsgleichung die Form

$$\varkappa'^2 \mu\nu = \varkappa^2 \mu'\nu'$$

gegeben werden; es folgt daraus in Erinnerung an die Formel 12. des 8. Abschnitts und im analogen Falle an die Formel 3. des 7. Abschnitts des ersten Theils der Satz: Stellt die Gleichung $\Sigma = 0$ zwei Punkte und die Gleichung $\Sigma' = 0$ den innern Mittelpunkt ihrer Verbindungslinie in Bezug auf sie dar, so repräsentirt die Gleichung $\varkappa\Sigma + \varkappa'\Sigma' = 0$ zwei Punkte dieser Graden, in Bezug auf die jener Punkt auch der innere Mittelpunkt ist, und stellt die Gleichung $S = 0$ zwei Grade und die Gleichung $S' = 0$ eine Winkelhalbirungslinie ihres Durchschnittspunkts in Bezug auf sie dar, so repräsentirt die Gleichung $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ zwei Grade dieses Punktes, in Bezug auf die jene Grade auch eine Winkelhalbirungslinie ist.

Stellen die Gleichungen $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ je zwei Punkte einer Graden dar, von denen das eine Paar harmonisch conjugirt in Bezug auf das andere ist, so haben u. a. die Gleichungen

$$\alpha_{22} = \alpha_2\alpha'_2,\ \alpha_{33} = \alpha_3\alpha'_3,\ 2\alpha_{23} = \alpha_2\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_2$$
$$\alpha'_{22} = \varkappa^2\alpha_2^2 - \varkappa'^2\alpha'^2_2,\ \alpha'_{33} = \varkappa^2\alpha_3^2 - \varkappa'^2\alpha'^2_3,$$
$$\alpha'_{23} = \varkappa^2\alpha_2\alpha_3 - \varkappa'^2\alpha'_2\alpha'_3$$

und demgemäss die Relation

$$\alpha_{22}\alpha'_{33} + \alpha_{33}\alpha'_{22} - 2\alpha_{23}\alpha'_{23} = 0$$

statt. Zwischen den Coefficienten der je zwei in Bezug auf einander harmonisch conjugirte Punkte darstellenden Gleichungen $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ bestehen daher die Relationen

$$\alpha_{22}\alpha'_{33} + \alpha_{33}\alpha'_{22} - 2\alpha_{23}\alpha'_{23} = 0,$$
$$\alpha_{33}\alpha'_{11} + \alpha_{11}\alpha'_{33} - 2\alpha_{31}\alpha'_{31} = 0,$$
$$\alpha_{11}\alpha'_{22} + \alpha_{22}\alpha'_{11} - 2\alpha_{12}\alpha'_{12} = 0$$

oder es sind also die drei ersten Coefficienten der in Bezug auf sie gebildeten Gleichung $F' = 0$ Null;

und umgekehrt deutet diese Beziehung unter den Coëfficienten zweier solcher Gleichungen die harmonische Eigenschaft der durch sie dargestellten Punkte an. Denn sind $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$; $(\varkappa, \varkappa')$, (λ, λ') ihre Formen, so kann

$$\alpha_{11} = \alpha_1\alpha'_1, \; 2\alpha_{23} = \alpha_2\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_2, \text{ u. s. f.}$$
$$\alpha'_{11} = \varkappa\lambda\alpha_1^2 + \varkappa'\lambda'\alpha'^2_1 + (\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa')\,\alpha_{11},$$
$$\alpha'_{23} = \varkappa\lambda\alpha_2\alpha_3 + \varkappa'\lambda'\alpha'_2\alpha'_3 + (\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa')\,\alpha_{23}, \text{ u. s. f.}$$

gesetzt werden, und jene vorausgesetzten Relationen führen auf die Gleichungen

$$(\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa')\,a_{11} = 0, \; (\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa')\,a_{22} = 0, \; (\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa')\,a_{33} = 0$$

und damit auf

$$\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa' = 0 \text{ d. i. } \lambda = \varkappa, \; \lambda' = -\varkappa'.$$

In gleicher Weise zeigt das Verschwinden der drei ersten Coefficienten der in Bezug auf die je zwei Grade darstellenden Gleichungen $S = 0$, $S' = 0$ gebildeten Gleichung $\Phi' = 0$ an, dass sie in Bezug auf einander harmonisch conjugirt sind.

12. Die auf der Fundamentallinie $|1, 0, 0|$ liegenden Punkte des Kegelschnitts werden durch die Gleichung

$$a_{33}a_2^2 + a_{22}a_3^2 - 2a_{23}a_2a_3 = 0$$

dargestellt, und es gilt daher für sie, weil die auf ihr liegenden Punkte durch die Form $(0, \alpha_2, \alpha_3)$ dargestellt sind, die Gleichung

$$a_{22}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 + 2a_{23}\alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Unterscheiden wir sie, die wir durch B_1, B'_1 bezeichnen, durch die Formen $(0, \alpha_2, \alpha_3)$, $(0, \alpha'_2, \alpha'_3)$ von einander, so ist demgemäss einerseits

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdot \frac{\alpha'_3}{\alpha'_2} = \frac{a_{22}}{a_{33}},$$

andererseits aber, wenn die Fundamentalpunkte durch A_1, A_2, A_3 gekennzeichnet werden, nach Formel 10. des 8. Abschnitts des ersten Theils

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -\frac{A_2B_1}{A_3B_1}, \; \frac{\alpha'_3}{\alpha'_2} = -\frac{A_2B'_1}{A_3B'_1},$$

folglich also

$$\frac{A_2B_1 \cdot A_2B'_1}{A_3B_1 \cdot A_3B_1} = \frac{a_{22}}{a_{33}}.$$

Daraus folgt: Die auf den den Eckpunkten A_1, A_2, A_3 eines Dreiecks entsprechenden Seitenlinien liegenden Punkte des Kegelschnitts B_1, B'_1; B_2, B'_2; B_3, B'_3 liegen so, dass

$$\frac{A_2B_1 \,.\, A_2B'_1 \,.\, A_3B_2 \,.\, A_3B'_2 \,.\, A_1B_3 \,.\, A_1B'_3}{A_3B_1 \,.\, A_3B'_1 \,.\, A_1B_2 \,.\, A_1B'_2 \,.\, A_2B_3 \,.\, A_2B'_3} = 1 \qquad 17.$$

(Carnot's Satz) ist.

In dem besondern Falle, wo die Fundamentallinien nur je einen Punkt mit dem Kegelschnitt gemein haben, ist

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -\frac{a_{23}}{a_{33}} \text{ und also } \frac{A_2B_1 \,.\, A_3B_2 \,.\, A_1B_3}{A_3B_1 \,.\, A_1B_2 \,.\, A_2B_3} = \frac{a_{23}a_{31}a_{12}}{a_{11}a_{22}a_{33}},$$

daneben aber

$$a^2_{23} - a_{22}a_{33} = 0,\; a^2_{31} - a_{33}a_{11} = 0,\; a^2_{12} - a_{11}a_{22} = 0$$

und folglich

$$\Delta^3 = 2(a_{23}a_{31}a_{12} - a_{11}a_{22}a_{33}),\; a^2_{23}a^2_{31}a^2_{12} = a^2_{11}a^2_{22}a^2_{33}.$$

Daraus ergiebt sich: Die auf den den Eckpunkten A_1, A_2, A_3 eines Dreiecks entsprechenden Seitenlinien liegenden Punkte des Kegelschnitts B_1, B_2, B_3 liegen, wenn vorausgesetztermassen jene Seitenlinien zugleich Grade desselben sind, so, dass im Falle der Nichtdegeneration des Kegelschnitts

$$\frac{A_2B_1 \,.\, A_3B_2 \,.\, A_1B_3}{A_3B_1 \,.\, A_1B_2 \,.\, A_2B_3} = -1,$$

dagegen aber

$$\frac{A_2B_1 \,.\, A_3B_2 \,.\, A_1B_3}{A_3B_1 \,.\, A_1B_2 \,.\, A_2B_3} = +1$$

(Theorem des Menelaus) ist, wenn der Kegelschnitt in eine Grade — eine andere Degeneration ist im gegenwärtigen Falle nicht möglich — degenerirt.

Die durch den Fundamentalpunkt (1, 0, 0) gehenden Graden des Kegelschnitts sind durch die Gleichung

$$\alpha_{33}\alpha_2^2 + \alpha_{22}\alpha_3^2 - 2\alpha_{23}\alpha_2\alpha_3 = 0$$

gegeben, folglich besteht diese von der oben gegebenen im Wesentlichen nur durch ein Vorzeichen sich unterscheidende Gleichung auch für die Durchschnittspunkte dieser Graden mit der Fundamentallinie |1, 0, 0| und es gelten somit die den obigen analogen Sätze: Die auf den durch die Eckpunkte

A_1, A_2, A_3 eines Dreiecks gehenden Graden des Kegelschnitts liegenden Punkte der entsprechenden Seitenlinien B_1, B'_1; B_2, B'_2; B_3, B'_3 liegen so, dass

$$18.\quad \frac{A_2B_1 \,.\, A_2B'_1 \,.\, A_3B_2 \,.\, A_3B'_2 \,.\, A_1B_3 \,.\, A_1B'_3}{A_3B_1 \,.\, A_3B'_1 \,.\, A_1B_2 \,.\, A_1B'_2 \,.\, A_2B_3 \,.\, A_2B'_3} = 1$$

ist. Die auf den durch die Eckpunkte A_1, A_2, A_3 eines Dreiecks gehenden Graden des Kegelschnitts liegenden Punkte der entsprechenden Seitenlinien B_1, B_2, B_3, liegen, wenn vorausgesetztermassen jene Eckpunkte zugleich Punkte desselben sind, so, dass im Falle der Nichtdegeneration des Kegelschnitts

$$\frac{A_2B_1 \,.\, A_3B_2 \,.\, A_1B_3}{A_3B_1 \,.\, A_1B_2 \,.\, A_2B_3} = +1,$$

dagegen aber

$$\frac{A_2B_1 \,.\, A_3B_2 \,.\, A_1B_3}{A_3B_1 \,.\, A_1B_2 \,.\, A_2B_3} = -1$$

(Ceva's Theorem) ist, wenn der Kegelschnitt in einen Punkt — eine andere Degeneration ist in diesem Falle unmöglich — degenerirt.

Unschwer erkennt man, dass alle diese Sätze auch die Umkehrung zulassen; sie lautet:

Wenn auf den Seitenlinien eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ sechs Punkte B_1, B'_1; B_2, B'_2; B_3, B'_3 so liegen, dass

$$\frac{A_2B_1 \,.\, A_2B'_1 \,.\, A_3B_2 \,.\, A_3B'_2 \,.\, A_1B_3 \,.\, A_1B'_3}{A_3B_1 \,.\, A_3B'_1 \,.\, A_1B_2 \,.\, A_1B'_2 \,.\, A_2B_3 \,.\, A_2B'_3} = 1$$

ist, so sind sie Punkte eines Kegelschnitts und ihre Verbindungslinien mit den Eckpunkten Grade eines Kegelschnitts.

Wenn auf den Seitenlinien eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ drei Punkte B_1, B_2, B_3 so liegen, dass

$$\frac{A_2B_1 \,.\, A_3B_2 \,.\, A_1B_3}{A_3B_1 \,.\, A_1B_2 \,.\, A_2B_3} = +1$$

ist, so liegen sie auf einer Graden und ihre Verbindungslinien mit den Eckpunkten sind Grade eines durch diese gehenden Kegelschnitts, liegen sie dagegen so, dass

$$\frac{A_2B_1 \,.\, A_3B_2 \,.\, A_1B_3}{A_3B_1 \,.\, A_1B_2 \,.\, A_2B_3} = -1$$

ist, so gehen ihre Verbindungslinien mit den Eckpunkten durch einen Punkt und sie sind Punkte eines an den Seitenlinien liegenden Kegelschnitts.

Auch erhellt das Bestehen der folgenden einander dualistisch entsprechenden Sätze, von denen jeder zugleich die Umkehrung des andern ist: Die Verbindungslinien der auf den Seitenlinien eines Dreiecks liegenden Punkte eines Kegelschnitts mit den Eckpunkten sind Grade eines Kegelschnitts. Die Durchschnittspunkte der durch die Eckpunkte eines Dreiecks gehenden Graden eines Kegelschnitts mit den Seitenlinien sind Punkte eines Kegelschnitts.

Endlich bemerken wir, dass zufolge der Formel 6. des 7. Abschnitts des ersten Theiles oder vielmehr der ihr dualistisch entsprechenden in den Formeln 17. und 18. vor jeden Factor auch das Zeichen sin treten kann und dass selbstverständlich diesen Sätzen dualistisch entsprechende zur Seite gestellt werden können.

13. Die der Gleichung $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ zugehörige Gleichung in Liniencoordinaten ist

$$\varkappa^2 \Delta\Sigma - 2\varkappa\varkappa'\Phi' + \varkappa'^2\Delta'\Sigma' = 0$$

— die Discriminanten sind im Degenerationsfalle wegzulassen —, denn es ist

$$(\varkappa a_{22} + \varkappa' a'_{22})(\varkappa a_{33} + \varkappa' a'_{33}) - (\varkappa a_{23} + \varkappa' a'_{23})^2 = \\ - \varkappa^2 \Delta\alpha_{11} + \varkappa\varkappa'\beta'_{11} - \varkappa'^2\Delta'\alpha'_{11}$$

$$(\varkappa a_{31} + \varkappa' a'_{31})(\varkappa a_{12} + \varkappa' a'_{12}) - (\varkappa a_{23} + \varkappa' a'_{23})(\varkappa a_{11} + \varkappa' a'_{11}) = \\ - \varkappa^2 \Delta\alpha_{23} + \varkappa\varkappa'\beta'_{23} - \varkappa'^2\Delta'\alpha'_{23} \text{ u. s. f.}$$

Schreibt man sie in der Form

$$\varkappa(\varkappa\Delta\Sigma - \varkappa'\Phi') + \varkappa'(\varkappa'\Delta'\Sigma' - \varkappa\Phi') = 0,$$

so sieht man, dass der Kegelschnitt $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ an den gemeinschaftlichen Graden der Kegelschnitte

$$\varkappa\Delta\Sigma - \varkappa'\Phi' = 0, \quad \varkappa'\Delta'\Sigma' - \varkappa\Phi' = 0$$

liegt und demgemäss jede dieser Graden eine Grade der durch die Gleichung

$$\Phi'^2 - \Delta\Delta'\Sigma\Sigma' = 0$$

— die Discriminanten fallen im Degenerationsfalle weg — dargestellten Curve ist, und erkennt umgekehrt, dass jede Grade dieser Curve einem der durch die Gleichung $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$

dargestellten Kegelschnitte angehört, eine Eigenschaft, die die Punkte, durch welche die Kegelschnitte $S = 0$ und $S' = 0$ oder alle durch die Gleichung $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ gegebenen Kegelschnitte gehen, offenbar besitzen; in Anbetracht dessen und aus dem Umstande, dass die Gleichung der Curve allein abhängig ist von den Gleichungen $S = 0$ und $S' = 0$, ist daher zu schliessen, dass durch sie jene Punkte dargestellt werden; sie giebt als eine Gleichung vierten Grades die Anzahl derselben im Allgemeinen als vier an.

In entsprechender Weise ist die der Gleichung $\varkappa \Sigma + \varkappa' \Sigma' = 0$ zugehörige Gleichung in Punktcoordinaten

$$19. \qquad \varkappa^2 \Delta S - 2\varkappa\varkappa' F' + \varkappa'^2 \Delta' S' = 0,$$

und die allen durch sie dargestellten Kegelschnitten gemeinschaftlichen — im Allgemeinen vier — Graden werden durch die Gleichung

$$F'^2 - \Delta\Delta' SS' = 0$$

gegeben; die Discriminanten fallen natürlich auch in diesen Gleichungen im Degenerationsfalle fort.

In dem Falle, dass durch $S' = 0$ eine Grade und durch $\Sigma' = 0$ ein Punkt dargestellt wird, reduciren sich die gegebenen Gleichungen vierten Grades auf

$$\Phi' = 0, \; F' = 0$$

und repräsentiren in Uebereinstimmung mit dem 3. Abschnitte die auf der Graden liegenden Punkte und die durch den Punkt gehenden Graden des Kegelschnitts. Dieser Umstand legt die Frage nach der allgemeinen Bedeutung der letzt geschriebenen Gleichungen nahe.

Zwischen den Coefficienten der in Bezug auf die Kegelschnitte $S = 0$, $S'' = 0$; $S' = 0$, $S'' = 0$ gebildeten Gleichungen $\Phi'' = 0$ und $\Phi''' = 0$ bestehen die Relationen

$$\begin{aligned}\beta''_{22}\beta'''_{33} + \beta''_{33}\beta'''_{22} - 2\beta''_{23}\beta'''_{23} = - 2\Delta'' \{\alpha''_{11}a_{11}a'_{11} \\ + \alpha''_{22}a_{12}a'_{12} + \alpha''_{33}a_{13}a'_{13} + \alpha''_{23}(a_{12}a'_{13} + a_{13}a'_{12}) \\ + \alpha''_{31}(a_{13}a'_{11} + a_{11}a'_{13}) + \alpha''_{12}(a_{11}a'_{12} + a_{12}a'_{11})\} \\ + (\beta'_{11}a''_{11} + \beta'_{22}a''_{22} + \beta'_{33}a''_{33} + 2\beta'_{23}a''_{23} \\ + 2\beta'_{31}a''_{31} + 2\beta'_{12}a''_{12})\, a''_{11},\end{aligned}$$

u. s. f.; degenerirt daher der Kegelschnitt $S'' = 0$ in eine Grade, in welchem Falle die Gleichungen $\Phi'' = 0$, $\Phi''' = 0$ die auf

der Graden $S''=0$ liegenden Punkte der Kegelschnitte $S=0$, $S'=0$ darstellen, so ist, wenn zugleich

$$\beta'_{11}a''_{11}+\beta'_{22}a''_{22}+\beta'_{33}a''_{33}+2\beta'_{23}a''_{23}+2\beta'_{31}a''_{31}+2\beta'_{12}a''_{12}=0$$

ist,

$$\beta''_{22}\beta''_{33}+\beta''_{33}\beta''_{22}-2\beta''_{23}\beta''_{23}=0, \text{ u. s. f.}$$

oder also, wenn die Grade $S''=0$ eine Grade des Kegelschnitts $\Phi'=0$ ist, die auf ihr liegenden Punkte der Kegelschnitte $S=0$, $S'=0$ vier harmonische Punkte. Der Kegelschnitt $\Phi'=0$ ist demnach der Ort der Graden, auf denen die Kegelschnitte $S=0$, $S'=0$ vier harmonische Punkte, und ebenso der Kegelschnitt $F'=0$ der Ort der Punkte, durch welche die Kegelschnitte $\Sigma=0$, $\Sigma'=0$ vier harmonische Grade bestimmen.

Eine Eigenschaft dieser Oerter ergiebt sich sofort aus dem Umstande, dass die den Kegelschnitten

$$\varkappa\Delta\Sigma-\varkappa'\Phi'=0,\quad \varkappa'\Delta'\Sigma'-\varkappa\Phi'=0$$

gemeinschaftlichen Graden durch die Durchschnittspunkte der Kegelschnitte $S=0$, $S'=0$ gehen, für $\varkappa'=0$ und $\varkappa=0$: Die Graden der Kegelschnitte $S=0$ und $S'=0$, die durch ihre gemeinschaftlichen Punkte gehen, sind Grade des Kegelschnitts $\Phi'=0$ und in gleicher Weise die Punkte der Kegelschnitte $\Sigma=0$ und $\Sigma'=0$, die auf ihren gemeinschaftlichen Graden liegen, Punkte des Kegelschnitts $F'=0$.

Ferner folgt aus den ausser für den Degenerationsfall geltenden Gleichungen

$$2\Delta^2\Phi'=\Delta^3\Sigma'_0-3\Theta'\Sigma$$
$$2\Delta^2F'=\Delta^3S'_0-3\Theta'S,$$

dass auch die dem Kegelschnitt $S=0$ und der Polarcurve des Kegelschnitts $S'=0$ in Bezug auf ihn gemeinschaftlichen Graden Grade des Kegelschnitts $\Phi'=0$ und die dem Kegelschnitt $\Sigma=0$ und der Polarcurve des Kegelschnitts $\Sigma'=0$ in Bezug auf ihn gemeinschaftlichen Punkte Punkte des Kegelschnitts $F'=0$ sind.

Endlich bemerken wir in Erinnerung an die Gleichungen 3. des 3. Abschnitts, dass die der Gleichung $\Phi'=0$ zugehörige Gleichung in Punktcoordinaten

$$3\Theta S+3\Theta'S'+2\Delta\Delta'F'=0$$

und die der Gleichung $F' = 0$ zugehörige Gleichung in Liniencoordinaten

$$3\Theta\Sigma + 3\Theta'\Sigma' + 2\Delta\Delta'\Phi' = 0$$

ist, ohne die aus diesen Gleichungen, in welchen die bisher noch nicht genannte Grösse

$$3\Theta = \Delta' (a'_{11}\alpha_{11} + a'_{22}\alpha_{22} + a'_{33}\alpha_{33} + 2a'_{23}\alpha_{23} + 2a'_{31}\alpha_{31} + 2a'_{12}\alpha_{12})$$

angenommen ist und im Degenerationsfalle die Discriminanten fortfallen, unmittelbar und vermittelst der letzten Gleichungen unter Beachtung der Relationen

$$\Delta\Theta = \Delta'\Theta', \; \Delta\Theta = \Delta'\Theta'$$

sich ergebenden Eigenschaften der Kegelschnitte $\Phi' = 0$, $F' = 0$ anzugeben.

Die auf der Graden $S'' = 0$ liegenden Punkte des Kegelschnitts $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ sind durch die Gleichung $\varkappa\Phi'' + \varkappa'\Phi''$ $= 0$ gegeben; es bestimmen daher auf einer jeden Graden die Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$, $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ sechs Punkte in Involution und ebenso durch jeden Punkt die Kegelschnitte $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$, $\varkappa\Sigma + \varkappa'\Sigma' = 0$ sechs Grade in Involution.

14. Die Gleichung $F' = 0$, gebildet in Bezug auf den Kegelschnitt $\Sigma = 0$ und zwei Punkte $\Sigma' = 0$, stellt den Ort eines Punktes dar, für welchen die durch ihn gehenden Graden des Kegelschnitts in Bezug auf seine Verbindungslinien mit jenen zwei Punkten harmonisch conjugirt sind. Sind insbesondere jene beiden Punkte die imaginären Kreispunkte, so bezeichnet die Gleichung $F' = 0$, die dann,

$$\mathcal{A} = s_1^2 a_{11} + s_2^2 a_{22} + s_3^2 a_{33} - 2s_2 s_3 \cos A_1 a_{23} - 2s_3 s_1 \cos A_2 a_{31} - 2s_1 s_2 \cos A_3 a_{12}$$

gesetzt, wegen $3\Theta' = \Delta\mathcal{A}$ und demgemäss zufolge der Gleichung

$$20. \qquad 2\Delta^2 F' = \Delta^3 \mathfrak{S} - \Delta\mathcal{A} S$$

die Form

$$\mathcal{A} S - \Delta^2 \mathfrak{S} = 0$$

annimmt, den Ort des Durchschnittspunktes je zweier zu einander rechtwinkliger Graden des Kegelschnitts. Er ist im Allgemeinen ein Kreis, dessen Centrum das Centrum des Kegelschnitts ist; denn es ist, da man unter Berücksichtigung, dass die der Gleichung $\Sigma = 0$ zugeordnete Gleichung $- 4J^2\mathfrak{R} = 0$ ist, für die in

Bezug auf den Kegelschnitt und die imaginären Kreispunkte gebildete Function Φ' wegen $3\Theta' = -4J^2 A$ die Gleichung

$$2\Delta^2\Phi' = -4J^2(\Delta^3 P - A\Sigma)$$

erhält, die der Gleichung $F' = 0$ zugehörige Gleichung in Liniencoordinaten

$$-4J^2\Delta P + A\Sigma = 0.$$

In zwei Fällen ist der Ort kein Kreis, und zwar in den Fällen, wo die harmonischen Hauptdiametrallinien auf einander senkrecht sind, ausser im Falle der Parabel, wenn $A = 0$ ist. Der Kegelschnitt, für den die Relation $A = 0$ gilt, ist eine Hyperbel; wir nennen ihn einen hyperbolischen Kreis (gleichseitige Hyperbel) und bezeichnen zum Unterschiede von diesem den gewöhnlichen Kreis als einen elliptischen. Den Grund zu dieser Benennung werden die nachfolgenden Untersuchungen klarlegen; hier bemerken wir nur, dass die Relation $A = 0$ zugleich die imaginären Kreispunkte als polar conjugirt in Bezug auf den hyperbolischen Kreis characterisirt, und dass man demzufolge diese als die anharmonischen Hauptpunkte der unendlich fernen Graden in Bezug auf ihn auffassen kann; in Bezug auf den elliptischen Kreis sind sie die harmonischen Hauptpunkte der unendlich fernen Graden. Der elliptische Kreis ist eine Ellipse, in Bezug auf welche die imaginären Kreispunkte die harmonischen, der hyperbolische Kreis eine Hyperbel, in Bezug auf welche sie die anharmonischen Hauptpunkte der unendlich fernen Graden sind. Jener Ort degenerirt im Falle des hyperbolischen Kreises in die Polaren der imaginären Kreispunkte, und ebenso degenerirt er in zwei Grade im Falle der Parabel, da in Folge des Umstands, dass das Centrum derselben auf der unendlich fernen Graden liegt, die letzte Gleichung einen Punkt darstellt.

Um dieses Letztere darzuthun, knüpfen wir hieran die an und für sich nöthige Darstellung der der im Allgemeinen einen Kreis vom Centrum des Kegelschnitts bezeichnenden Gleichung $\varkappa P + \varkappa'\Sigma = 0$ zugehörigen Gleichung in Punktcoordinaten. Sie muss, da die $P = 0$ zugehörige Gleichung $0 = 0$ ist, von der Form

$$2\varkappa\varkappa' F' + 4J^2\varkappa'^2 \mathbf{R} = 0$$

sein, wo die Function $F' = 0$, gebildet in Bezug auf das Centrum und die imaginären Kreispunkte, die Verbindungslinien desselben mit diesen darstellt. Diese Verbindungslinien sind als durch die Durchschnittspunkte der unendlich fernen Graden $\mathbf{R} = 0$ und des Kreises $\mathcal{A}S - \Delta^2\mathfrak{S} = 0$ und als durch das Centrum, den Durchschnittspunkt der harmonischen Hauptdiametrallinien $\Delta^3\mathbf{R} - \mathcal{A}S = 0$ und der Polaren der Kreispunkte $\mathfrak{S} = 0$, gehend durch die Gleichung

$$\mathcal{A}\Delta^3\mathbf{R} - \mathcal{A}(\mathcal{A}S - \Delta^2\mathfrak{S}) = 0,$$

weil auch in der Form $\mathcal{A}(\Delta^3\mathbf{R} - \mathcal{A}S) + \mathcal{A}\Delta^2\mathfrak{S} = 0$ darstellbar, gegeben, auch im Falle des hyperbolischen Kreises und der Parabel, da sie im ersten Falle, weil die imaginären Kreispunkte in Bezug auf den hyperbolischen Kreis polar conjugirt sind, deren Polaren sind und im zweiten Falle mit der unendlich fernen Graden zusammenfallen. Demnach ist, unter μ eine vorläufig noch unbestimmte Constante verstanden, in jedem Falle

$$2\mu F' = \mathcal{A}\Delta^3\mathbf{R} - \mathcal{A}(\mathcal{A}S - \Delta^2\mathfrak{S})$$

und also die in Rede stehende Gleichung von der Form

$$\varkappa'((\varkappa\mathcal{A}\Delta^3 + 4J^2\varkappa'\mu)\mathbf{R} - \varkappa\mathcal{A}(\mathcal{A}S - \Delta^2\mathfrak{S})) = 0,$$

und man erhält, da die Constante μ sich hieraus durch den Umstand, dass die der Gleichung $-4J^2\Delta\boldsymbol{P} + \mathcal{A}\boldsymbol{\Sigma} = 0$, sofern sie einen Kreis darstellt, zugehörige Gleichung in Punktcoordinaten $\mathcal{A}S - \Delta^2\mathfrak{S} = 0$ ist, indem darnach $\varkappa\mathcal{A}\Delta^3 + 4J^2\varkappa'\mu$ für $\varkappa = -4J^2\Delta$, $\varkappa' = \mathcal{A}$ Null sein muss, als die Grösse Δ^4 bestimmt, somit als d i e d e r G l e i c h u n g $\varkappa\boldsymbol{P} + \varkappa'\boldsymbol{\Sigma} = 0$ z u g e h ö r i g e G l e i c h u n g

$$\varkappa'(\Delta^3(\varkappa\mathcal{A} + 4J^2\Delta\varkappa')\mathbf{R} - \varkappa\mathcal{A}(\mathcal{A}S - \Delta^2\mathfrak{S})) = 0.$$

In der That zeigt sie, dass die Gleichung $-4J^2\Delta\boldsymbol{P} + \mathcal{A}\boldsymbol{\Sigma} = 0$ im Falle der Parabel einen Punkt darstellt, da sie die Form $0 = 0$ annimmt.

Wir bemerken dazu noch Folgendes: Die Gleichung $\varkappa\boldsymbol{P} + \varkappa'\boldsymbol{\Sigma} = 0$ stellt in Liniencoordinaten und die Gleichung $\varkappa\mathbf{R} + \varkappa'(\mathcal{A}S - \Delta^2\mathfrak{S}) = 0$ in Punktcoordinaten im Allgemeinen einen Kreis und nur in besonderen Fällen Punkte und Grade dar; wir fassen demgemäss diese Punkte und Grade als solche auf, in die der Kreis degenerirt.

Zweites Kapitel.

Die elliptischen und hyperbolischen Brennpunkte. Das Prinzip der Continuität.

---

15. Die Anzahl der Graden, welche die imaginären Kreispunkte mit dem Kegelschnitt gemein haben, ist vier; zu ihnen gehört, da sie sowohl Grade des Kegelschnitts, als auch Grade der imaginären Kreispunkte sind, ein sich selbst in Bezug auf den Kegelschnitt sowohl, als auch die imaginären Kreispunkte polar conjugirtes Dreieck als Diagonaldreieck. Zu den Seitenlinien und Eckpunkten desselben gehört offenbar die unendlich ferne Grade und deren Pol, das Centrum des Kegelschnitts; es müssen daher unter Berücksichtigung, dass die in Bezug auf die imaginären Kreispunkte polar conjugirten Graden zu einander rechtwinklig sind, die beiden übrigen Seitenlinien und Eckpunkte die zu einander senkrechten polar conjugirten Diametrallinien, die Hauptdiametrallinien, und deren Pole sein. Die vier Graden schneiden sich in sechs Punkten, von denen zwei, die imaginären Kreispunkte, auf der unendlich fernen Graden, die vier andern dagegen zu zweien auf den Hauptdiametrallinien liegen. Diese vier äusserst merkwürdigen Punkte nennt man die Brennpunkte des Kegelschnitts. Ihre Gleichung, durch die wir sofort auch auf die Gleichung der Hauptdiametrallinien geführt werden, muss von der Form $\varkappa\Sigma + \varkappa'\boldsymbol{\Sigma} = 0$ sein, und zwar muss sie aus dieser Form für diejenigen Werthe von $\varkappa$, $\varkappa'$ erhalten werden, für welche der durch sie dargestellte Kegelschnitt in Punkte degenerirt.

16. Der Kegelschnitt $\varkappa\Sigma + \varkappa'\Sigma' = 0$ degenerirt für drei Werthe von $\varkappa$, $\varkappa'$ in Punkte, denn die Bedingung, unter welcher dies stattfindet, wird gefunden, wenn man in der Gleichung

$$-\Delta^3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0$$

an die Stelle von α_{11}, α_{23}, - - - die Grössen $\varkappa\alpha_{11} + \varkappa'\alpha'_{11}$, $\varkappa\alpha_{23} + \varkappa'\alpha'_{23}$, - - - setzt, und ist daher durch eine Gleichung vom dritten Grade in Bezug auf $\varkappa$, $\varkappa'$ gegeben. Jene drei

Werthe von $\varkappa$, $\varkappa'$ sind die Wurzeln dieser Gleichung, in der $-\Delta^3$ der Factor von $\varkappa^3$ und der Factor von $\varkappa^2\varkappa'$ die als die Grösse $-3\Theta'$ sich erweisende Determinantensumme

$$\begin{vmatrix} \alpha'_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha'_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha'_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha'_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha'_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha'_{32}, & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha'_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha'_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha'_{33} \end{vmatrix}$$

und in gleicher Weise $-\Delta'^3$ und -3Θ die Factoren von $\varkappa'^3$ und $\varkappa\varkappa'^2$ sind. Der Kegelschnitt $\varkappa\Sigma + \varkappa'\Sigma' = 0$ degenerirt darnach in Punkte für die aus der Gleichung

$$\Delta^3\varkappa^3 + 3\Theta'\varkappa^2\varkappa' + 3\Theta\varkappa\varkappa'^2 + \Delta'^3\varkappa'^3 = 0$$

sich ergebenden Werthe von $\varkappa$, $\varkappa'$. Und ebenso: Der Kegelschnitt $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ degenerirt in Grade für die durch die Gleichung

$$\Delta^3\varkappa^3 + 3\Theta'\varkappa^2\varkappa' + 3\Theta\varkappa\varkappa'^2 + \Delta'^3\varkappa'^3 = 0$$

bestimmten Werthe von $\varkappa$, $\varkappa'$.

17. Für $\varkappa\Sigma + \varkappa'\mathbf{\Sigma} = 0$ nimmt die in Betracht kommende kubische Gleichung nach Unterdrückung des Factors $\varkappa$ und Multiplication mit Δ in Folge der in diesem Falle statt habenden Relationen

$$3\Theta' = \Delta\mathcal{A},\; 3\Theta\Delta = -4J^2\mathcal{A}$$

die quadratische Form

$$\Delta^4\varkappa^2 + \Delta^2\mathcal{A}\varkappa\varkappa' - 4J^2\mathcal{A}\varkappa'^2 = 0$$

an; sie liefert, wenn die Grösse $\mathbf{A}$ durch die Gleichung

$$\mathbf{A}^2 = \mathcal{A}^2 + 16J^2\mathcal{A}$$

eingeführt wird, die Werthe

$$\varkappa = \mathcal{A} + \mathbf{A},\; \varkappa' = -2\Delta^2$$

und damit die Gleichung der Brennpunkte des Kegelschnitts

$$(\mathcal{A} + \mathbf{A})\,\Sigma - 2\Delta^2\mathbf{\Sigma} = 0.$$

Sie bezeichnet, da die Grösse $\mathbf{A}$ eines doppelten Vorzeichens fähig ist, die Anzahl derselben in der That als vier; jede zwei einem Vorzeichen der Grösse $\mathbf{A}$ entsprechende Brennpunkte heissen wir zusammengehörig.

18. In Erinnerung an die Gleichung

$$4\mathcal{A} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_3\lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_2$$

und mit Rücksicht darauf, dass

$$\mathbf{A} = s_2 s_3 \cos A_1\lambda_1 + s_3 s_1 \cos A_2\lambda_2 + s_1 s_2 \cos A_3\lambda_3$$

gesetzt werden kann, kann die Grösse $\mathbf{A}^2$ auch in der Form

$$\mathbf{A}^2 = s_2^2 s_3^2 \lambda_1^2 + s_3^2 s_1^2 \lambda_2^2 + s_1^2 s_2^2 \lambda_3^2 - 2 s_1^2 s_2 s_3 \cos A_1\lambda_2\lambda_3$$
$$- 2 s_2^2 s_3 s_1 \cos A_2\lambda_3\lambda_1 - 2 s_3^2 s_1 s_2 \cos A_3\lambda_1\lambda_2$$

oder

$$\mathbf{A}^2 = s_1^2 s_2^2 s_3^2 \left\{ s_1^2 \left(\frac{\lambda_1}{s_1^2}\right)^2 + s_2^2 \left(\frac{\lambda_2}{s_2^2}\right)^2 + s_3^2 \left(\frac{\lambda_3}{s_3^2}\right)^2 \right.$$
$$- 2 s_2 s_3 \cos A_1 \left(\frac{\lambda_2}{s_2^2}\right)\left(\frac{\lambda_3}{s_3^2}\right) - 2 s_3 s_1 \cos A_2 \left(\frac{\lambda_3}{s_3^2}\right)\left(\frac{\lambda_1}{s_1^2}\right)$$
$$\left. - 2 s_1 s_2 \cos A_3 \left(\frac{\lambda_1}{s_1^2}\right)\left(\frac{\lambda_2}{s_2^2}\right) \right\}$$

dargestellt werden; diese Gleichung kennzeichnet $\mathbf{A}^2$ als die mit $s_1^2 s_2^2 s_3^2$ multiplicirte Entfernungsconstante der reellen Graden

$$\left| \frac{\lambda_1}{s_1^2},\ \frac{\lambda_2}{s_2^2},\ \frac{\lambda_3}{s_3^2} \right|$$

und damit $\mathbf{A}$ als eine in jedem Falle reelle Grösse, zugleich zeigt sie, dass für den elliptischen Kreis, und nur für diesen, die Gleichung $\mathbf{A} = 0$ besteht, und diese Gleichung somit, ebenso wie die Proportion $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = s_1^2 : s_2^2 : s_3^2$, die Bedingung angiebt, für welche die homogene Gleichung zweiten Grades einen elliptischen Kreis darstellt.

Die durch die Gleichung

$$\mathfrak{A}^2 + 8J^2\Delta = \mathbf{A}^2 - 8J^2\Delta$$

mit einander verknüpften Grössen Δ, $\mathfrak{A}$, $\mathbf{A}$ sind neben der Grösse Δ^3, wie schon aus dem Bisherigen hervorgeht, von der hervorragendsten Bedeutung in der Theorie der Kegelschnitte. Während die Grösse Δ^3 dadurch, dass sie sich als von der Null verschieden oder nicht verschieden erweist, Aufschluss darüber giebt, ob eine homogene Gleichung zweiten Grades einen eigentlichen Kegelschnitt oder Punkte und Grade darstellt, sind es diese zu den imaginären Kreispunkten und der unendlich fernen Graden in Beziehung stehenden Functionen, welche die besonderen Arten der Kegelschnitte, die Ellipse und Hyperbel, kennzeichnen, welche durch ihre besondere Beschaffenheit die individuellen Kegelschnitte, den elliptischen und hyperbolischen Kreis, und den Grenzfall der Parabel characterisiren. Das Negativ- und Positivsein der Grösse

$$\Delta \text{ oder } \mathbf{A}^2 - \mathfrak{A}^2$$

bezeichnet den Character des Kegelschnitts als Ellipse und Hyperbel, die Gleichung

$$\mathcal{A} = 0 \text{ oder } \boldsymbol{A}^2 = \mathcal{A}^2$$

characterisirt den Grenzfall der Parabel und die individuellen Kegelschnitte sind, der elliptische Kreis durch die Gleichung

$$\boldsymbol{A} = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^2 = -16J^2\mathcal{A}$$

und der hyperbolische Kreis durch die Gleichung

$$\mathcal{A} = 0 \text{ oder } \boldsymbol{A}^2 = +16J^2\mathcal{A}$$

gekennzeichnet.

19. Die der Brennpunktsgleichung zugehörige Gleichung in Punktcoordinaten giebt die Gleichung 19. des 13. Abschnitts unter Berücksichtigung der Gleichung 20. des 14. Abschnitts nach Division mit $2\mathcal{A}^3$ — dieser Factor macht sie zur zugeordneten — in der Form

$$-8J^2\mathfrak{G} + (\mathcal{A} + \boldsymbol{A})\,\mathfrak{S} = 0;$$

sie stellt die Hauptdiametrallinien des Kegelschnitts dar, welche darnach in jedem Falle reell sind, weil eine durch eine Gleichung mit reellen Coefficienten dargestellte Grade stets reell ist.

Der Mittelpunkt der Hauptdiametrallinien in Bezug auf jede zwei zusammengehörige Brennpunkte ist das Centrum, wie sofort aus der Brennpunktsgleichung in Erinnerung an die Schlussbemerkung des 5. Abschnitts zu erkennen ist.

Die Hauptdiametrallinien sind die Winkelhalbirungslinien des Centrums in Bezug auf die harmonischen Hauptdiametrallinien.

Es giebt im Allgemeinen nur 2 polar conjugirte Diametrallinien, durch welche die Winkel der harmonischen Hauptdiametrallinien, und 0 polar conjugirte Diametrallinien, deren Winkel durch sie halbirt werden. Allein die individuellen Kegelschnitte und die Parabel machen hiervon eine Ausnahme. Im Falle des elliptischen Kreises ist die Anzahl der erst bezeichneten Graden unendlich gross, da die harmonischen Hauptdiametrallinien durch die imaginären Kreispunkte gehen und also jede auf sich selbst senkrecht ist; jede zwei polar conjugirte Diametrallinien sind zu einander senkrecht und können als Hauptdiametrallinien aufgefasst werden. In der That hat die sie darstellende Gleichung

$$-8J^2\mathfrak{G}+\varDelta\mathfrak{S}=0$$

wegen $\mathfrak{G}=\lambda\mathfrak{S}$, $\varDelta=8J^2\lambda$ die Form $0=0$, und die Brennpunktsgleichung

$$\varDelta\Sigma-2\varDelta^2\boldsymbol{\Sigma}=0$$

bezeichnet gleichfalls demgemäss, da $\varDelta(\varDelta\Sigma-2\varDelta^2\boldsymbol{\Sigma})=-16J^2(\varDelta\Sigma+\lambda\varDelta^2\boldsymbol{\Sigma})=-16J^2\varDelta^3\boldsymbol{P}$ ist, die vier Brennpunkte des elliptischen Kreises als mit dem Centrum zusammenfallend. Im Falle des hyperbolischen Kreises dagegen ist die Zahl der letzt bezeichneten Graden unendlich gross, da die harmonischen Hauptdiametrallinien zu einander senkrecht sind; jede zwei polar conjugirte Diametrallinien bilden mit den harmonischen Hauptdiametrallinien gleiche Winkel. Die Hauptdiametrallinien stellt die Gleichung

$$-8J^2\mathfrak{G}+\varDelta S=0,$$

die Brennpunkte die Gleichung

$$\varDelta\Sigma-2\varDelta^2\boldsymbol{\Sigma}=0$$

dar. Die Parabel endlich hat in beiden Fällen eine unendliche Anzahl solcher Graden, weil die harmonischen Hauptdiametrallinien mit der unendlich fernen Graden zusammenfallen; von zwei polar conjugirten Diametrallinien ist die eine stets die unendlich ferne Grade. Die Hauptdiametrallinien der Parabel sind durch die Gleichungen

$$-4J^2\varDelta\mathbf{R}+\varDelta\mathfrak{S}=0,\ \mathbf{R}=0,$$

die Brennpunkte durch die Gleichungen

$$\varDelta\Sigma-\varDelta^2\boldsymbol{\Sigma}=0,\ \boldsymbol{\Sigma}=0$$

gegeben; drei Brennpunkte der Parabel sind Punkte der unendlich fernen Graden, das Centrum und die imaginären Kreispunkte.

Da die durch die einer Diametrallinie angehörenden Punkte des Kegelschnitts gehenden Graden desselben der ihr polar conjugirten Diametrallinie parallel sind, so sind die durch die auf einer Hauptdiametrallinie liegenden Punkte des Kegelschnitts gehenden Graden desselben auf ihr senkrecht; insbesondere ist daher jede Grade des elliptischen Kreises senkrecht zu der durch den ihr zugehörigen Punkt des Kreises gehenden Diametrallinie.

20. Jede zwei Punkte, die vom Centrum des Kegelschnitts gleich weit entfernt sind und auf einer der Hauptdiametrallinien liegen, sind, wenn

21. $$\mathrm{B} = (\mathcal{A} + \boldsymbol{A})\,\Sigma - 2\Delta^2\boldsymbol{\Sigma}$$

gesetzt und also durch $\mathrm{B} = 0$ die Brennpunkte bezeichnet werden, durch die Gleichung

$$\varkappa 16 J^2 \Delta^3 \boldsymbol{P} + \varkappa' \mathrm{B} = 0$$

dargestellt, weil die Brennpunkte gleich weit vom Centrum abliegen. Die ihr zugeordnete Gleichung ist, weil sie die Verbindungslinie jener Punkte, eine Hauptdiametrallinie, darstellt, unter c einen constanten Factor verstanden, von der Form

$$c\,(-8J^2\mathfrak{G} + (\mathcal{A} + \boldsymbol{A})\,\mathfrak{S}) = 0$$

oder also, da sich die Constante durch die Bemerkung, dass die gegebene Gleichung für $\varkappa' = 0$ das Centrum, für $\varkappa' - (\mathcal{A} - \boldsymbol{A})\,\varkappa = 0$ die Pole der Hauptdiametrallinien und für $\varkappa = 0$ die Brennpunkte darstellt und daher die ihr zugeordnete Gleichung in den beiden ersten Fällen die Form $0 = 0$ annehmen und im dritten Falle den Factor $2\Delta^3\varkappa'^2$ eingehen muss, als mit $2\Delta^3\varkappa'(\varkappa' - (\mathcal{A} - \boldsymbol{A})\,\varkappa)$ identisch erweist, von der Form

$$2\Delta^3\varkappa'(\varkappa' - (\mathcal{A} - \boldsymbol{A})\,\varkappa)\,(-8J^2\mathfrak{G} + (\mathcal{A} + \boldsymbol{A})\,\mathfrak{S}) = 0.$$

Demzufolge lässt sich nunmehr sofort die Entfernung der beiden Punkte von einander — ihre halbe Entfernung von einander oder also ihre Entfernung vom Centrum bezeichnen wir durch h — vermittelst der Formel 13. des 8. Abschnitts bestimmen; man erhält aus ihr, nachdem man sie mit Δ^2 multiplicirt, mit Rücksicht darauf, dass

$$\Delta^4(\dot\alpha_{11} + \dot\alpha_{22} + \dot\alpha_{33} + 2\dot\alpha_{23} + 2\dot\alpha_{31} + 2\dot\alpha_{12}) \\ = \Delta^4(\dot\alpha_1 + \dot\alpha_2 + \dot\alpha_3)^2 = \Delta^2$$

und ferner, wie aus den Gleichungen

$$\Delta^3 a'_{11_0} = 3\Theta' a_{11} + \Delta^2 b'_{11},$$
$$\Delta^3 a'_{23_0} = 3\Theta' a_{23} + \Delta^2 b'_{23}, \text{ u. s. f.}$$

und der sofort erhellenden Gleichung

$$b'_{11}\alpha'_{11} + b'_{22}\alpha'_{22} + b'_{33}\alpha'_{33} + 2b'_{23}\alpha'_{23} + 2b'_{31}\alpha'_{31} \\ + 2b'_{12}\alpha'_{12} = -6\Theta$$

hervorgeht, dass

$$\Delta^4(\alpha'_{11}a'_{11_0} + \cdots + 2\alpha'_{23}a'_{23_0} + \cdots) = 9\Theta'^2 - 6\Delta^3\Theta$$

und somit

$$\Delta^2 (s_1^2 \mathbf{s}_1^2 + \cdots + 2 s_2 s_3 \cos A_1 \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_3 \cos \mathbf{A}_1 + \cdots) = A^2 + 8J^2 \Delta$$

ist, für h die Gleichung

$$(\varkappa\, 16 J^2 \Delta^2 + \varkappa' (A + \mathbf{A}) \Delta)^2 h^2 = 2\Delta^3 \varkappa' (\varkappa' - (A - \mathbf{A}) \varkappa)(8J^2 \Delta A + (A + \mathbf{A})(A^2 + 8J^2 \Delta))$$

oder nach gehöriger Umformung und Division mit $(\varkappa' - (A - \mathbf{A}) \varkappa)(A - \mathbf{A})^2$ die Gleichung

$$22. \qquad (\varkappa' - (A - \mathbf{A}) \varkappa) \Delta^2 h^2 = \Delta^3 \mathbf{A} \varkappa'.$$

Für $\varkappa = 0$ ergiebt sich aus ihr für die Entfernung zweier zusammengehöriger Brennpunkte — sie wird durch 2c bezeichnet — der Ausdruck

$$c^2 = \frac{\Delta^3 \mathbf{A}}{\Delta^2};$$

er zeigt, dass zwei Brennpunkte des Kegelschnitts reell und zwei imaginär sind. Die Gleichung

$$(A + \mathbf{A}) \Sigma - 2\Delta^2 \mathbf{\Sigma} = 0$$

stellt die reellen Brennpunkte dar, wenn der Grösse $\mathbf{A}$ das das Product $\Delta^3 \mathbf{A}$ positiv machende Vorzeichen beigelegt wird, im andern Falle die imaginären Brennpunkte. Die durch die reellen Brennpunkte gehende Hauptdiametrallinie bezeichnen wir als die erste, die andere als die zweite Hauptdiametrallinie.

21. Setzt man in den Gleichungen 21. und 22. $\varkappa' - \mathbf{A}\varkappa$, $\Delta\varkappa'$ an die Stelle von $\varkappa$, $\varkappa'$ und bestimmt den Ausdruck $\mathbf{B}$ durch die Gleichung

$$\Delta B + \mathbf{A}\mathbf{B} + 16 J^2 \Delta^3 \mathbf{P} = 0,$$

so gehen sie nach Division mit $\mathbf{A}$ in die analog gebildeten Gleichungen

$$\varkappa 16 J^2 \Delta^3 \mathbf{P} + \varkappa' \mathbf{B} = 0 \qquad 23.$$

$$(\varkappa' - (\mathbf{A} - A) \varkappa) \Delta^2 h^2 = \Delta^3 A \varkappa' \qquad 24.$$

über.

Die Gleichung

$$\mathbf{B} = 0,$$

deren Coefficienten durch die obige Gleichung im Allgemeinen bestimmt sind, stellt offenbar im Allgemeinen zwei oder wegen des doppelten Vorzeichens der Grösse $\mathbf{A}$ eigentlich vier auf jeder Hauptdiametrallinie zu zweien vom Centrum gleich weit abliegende Punkte dar, und demzufolge repräsentirt auch die

Gleichung 23. zwei auf einer Hauptdiametrallinie gleich weit vom Centrum ab liegende Punkte, wie es nach ihrer Herleitung in der That sein muss, und die Gleichung 24. giebt deren halbe Entfernung vom Centrum; insbesondere besteht nach ihr für die Entfernung der Punkte $\boldsymbol{B} = 0$ vom Centrum — wir bezeichnen sie durch $\mathfrak{c}$ — die Gleichung

$$\mathfrak{c}^2 = \frac{\Delta^3 \mathcal{A}}{\mathcal{A}^2}.$$

Wegen der Analogie, die, nach der Form der gegebenen Gleichungen zu schliessen, zwischen den Punkten $B = 0$ und $\boldsymbol{B} = 0$ statt hat, nennen wir diese die hyperbolischen Brennpunkte des Kegelschnitts, während wir jene als elliptische bezeichnen.

Im Einzelnen ist Folgendes zu beachten. Für den hyperbolischen Kreis stellt die Gleichung $\boldsymbol{B} = 0$ wegen $\mathcal{A} = 0$ einen oder, besser gesagt, mit dem Centrum zusammenfallende Punkte dar, und demnach ebenso die Gleichung 23.; in der That giebt die Gleichung 24. ihre Entfernung vom Centrum als Null an. Analog offenbar dem Falle des elliptischen Kreises rücksichtlich der Gleichung $B = 0$ und der Gleichungen 21. und 22. Für den elliptischen Kreis ist wegen $\boldsymbol{A} = 0$ und $\mathcal{A}B = -16J^2\Delta^3\boldsymbol{P}$ die Gleichung $\boldsymbol{B} = 0$ eine ganz unbestimmte; wir nehmen daher an, dass in gleicher Weise durch sie zwei auf einer Diametrallinie in der Entfernung $\mathfrak{c}$ vom Centrum ab liegende Punkte dargestellt werden; es sind dann durch die Gleichung 23. zwei auf einer Diametrallinie in gleicher Entfernung vom Centrum ab liegende Punkte dargestellt und — ihre halbe Entfernung vom Centrum ist durch die Gleichung 24. gegeben. Dieses letztere sprechen wir aus, absehend von der darauf uns hinweisenden Analogie, in der Ueberzeugung von dem Bestehen eines Prinzips der Continuität in der Geometrie. Was für die Ellipse und Hyperbel gilt, muss nach diesem Prinzip auch, durch ihre Natur bedingte Modificationen natürlich vorausgesetzt, für die individuelle Ellipse und Hyperbel, den elliptischen und hyperbolischen Kreis, und den Grenzfall der Parabel gelten. Eine Anwendung von diesem Prinzip der Continuität ist übrigens schon im 24. Abschnitte des ersten Theils von uns gemacht worden, als wir die für die reellen Graden

und Punkte entwickelten Grundformeln der analytischen Geometrie auch für die imaginären Graden und Punkte als geltend hinstellten. Eine andere Anwendung ist darin enthalten, wenn wir einen Eckpunkt des Fundamentaldreiecks z. B. A_3 auf der unendlich fernen Graden annehmen und so aus dem Carnotschen Satze die Gleichung

$$\frac{A_1B_2 \,.\, A_1B'_2}{A_2B_1 \,.\, A_2B'_1} = \frac{A_1B_3 \,.\, A_1B'_3}{A_2B_3 \,.\, A_2B'_3}$$

und damit den Satz entnehmen: Das Verhältniss der Producte aus den Entfernungen zweier Punkte beziehungsweise von den auf zwei durch sie gehenden parallelen Graden liegenden Punkten des Kegelschnitts ist constant.

Diesen Bemerkungen zufolge sind darnach jede zwei auf einer Hauptdiametrallinie gleich weit vom Centrum ab liegende Punkte ausser im Falle des elliptischen Kreises durch die Gleichung

$$\varkappa 16 J^2 \Delta^3 \boldsymbol{P} + \varkappa' B = 0 \qquad 25.$$

und ausser im Falle des hyperbolischen Kreises durch die Gleichung

$$\varkappa 16 J^2 \Delta^3 \boldsymbol{P} + \varkappa' \boldsymbol{B} = 0 \qquad 26.$$

darstellbar, und es ist die halbe Entfernung der durch diese Gleichungen bestimmten Punkte beziehungsweise durch die Formeln

$$(\varkappa' - (A - \boldsymbol{A})\varkappa)\, h^2 = c^2\varkappa', \quad c^2 = \frac{\Delta^3 \boldsymbol{A}}{\Delta^2} \qquad 27.$$

$$(\varkappa' - (\boldsymbol{A} - A)\varkappa)\, h^2 = \boldsymbol{c}^2\varkappa', \quad \boldsymbol{c}^2 = \frac{\Delta^3 A}{\Delta^2} \qquad 28.$$

gegeben.

22. Die Gleichung

$$AB + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + 16 J^2 \Delta^3 \boldsymbol{P} = 0$$

giebt dadurch, dass sie sich in der Form

$$-2\Delta^2 (-8J^2 \boldsymbol{\Gamma} + A\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{A}(A + \boldsymbol{A})\Sigma + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = 0,$$

ferner in der Form

$$-2\Delta^2 (-8J^2 \Delta \boldsymbol{P} + A\boldsymbol{\Sigma}) + A(A + \boldsymbol{A})\Sigma + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = 0$$

und endlich nach Multiplication mit $A - \boldsymbol{A}$ in der Form

$$-2\Delta^2 A(-8J^2 \boldsymbol{\Gamma} + (A + \boldsymbol{A})\boldsymbol{\Sigma})$$
$$+ 4\Delta^2 \boldsymbol{A}(-4J^2 \Delta \boldsymbol{P} + A\boldsymbol{\Sigma}) + (A - \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = 0$$

darstellen lässt, Aufschluss über die hyperbolischen Brennpunkte, die übrigens nach dem Ausdruck für ihre Entfernung vom Centrum entweder sämmtlich reell oder imaginär sind.

Auf der unendlich fernen Graden liegen zwei Punkte

$$-8J^2\Gamma + \Delta\Sigma = 0,$$

die wir aus weiter unten erhellenden Gründen die (unendlich fernen) reellen Kreispunkte in Bezug auf den Kegelschnitt nennen. Die Anzahl der Graden, welche diese Punkte mit dem Kegelschnitt gemein haben, ist vier; zu ihnen gehört ein in Bezug sowohl auf den Kegelschnitt, als auch auf die reellen Kreispunkte sich selbst conjugirtes Dreieck als Diagonaldreieck. Zu den Seitenlinien und Eckpunkten desselben gehört die unendlich ferne Grade und deren Pol, das Centrum; die übrigen Seitenlinien und Eckpunkte sind die Hauptdiametrallinien und deren Pole. Die vier Graden schneiden sich in sechs Punkten, von denen zwei, die reellen Kreispunkte, auf der unendlich fernen Graden, die vier andern dagegen zu zweien auf den Hauptdiametrallinien liegen. Diese vier Punkte sind die hyperbolischen Brennpunkte.

Die vier durch die hyperbolischen Brennpunkte gehenden Graden des Kegelschnitts sind zugleich Grade eines Kreises, dessen Gleichung

$$-8J^2\Delta P + \Delta\Sigma = 0$$

ist, und endlich erscheinen die hyperbolischen Brennpunkte selbst als die auf den Hauptdiametrallinien liegenden Punkte des Kreises

$$-4J^2\Delta P + \Delta\Sigma = 0$$

oder also nach dem 14. Abschnitte des Ortes des Durchschnittspunktes zweier zu einander senkrechter Graden des Kegelschnitts. Die durch die hyperbolischen Brennpunkte gehenden Graden des Kegelschnitts sind demnach zwei und zwei zu einander senkrecht, und demzufolge die reellen Kreispunkte die unendlich fernen Punkte der Winkelhalbirungsdiametrallinien in Bezug auf die Hauptdiametrallinien; durch die Durchschnittspunkte dieser und der vorher genannten Graden geht der Kreis $-8J^2\Delta P + \Delta\Sigma = 0$, das Quadrat seines Radius ist daher offenbar $\frac{1}{2}\mathbf{c}^2$.

Im Falle des elliptischen Kreises sind jede zwei zu einander senkrechten Diametrallinien Hauptdiametrallinien; die Anzahl der reellen Kreispunkte ist desshalb eine unendliche, ebenso auch die der hyperbolischen Brennpunkte, die sämmtlich Punkte des Kreises $-4J^2\Delta\boldsymbol{P}+A\boldsymbol{\Sigma}=0$ oder $A\Sigma+2\Delta^2\boldsymbol{\Sigma}=0$ sind. Der Kreis $-8J^2\Delta\boldsymbol{P}+A\boldsymbol{\Sigma}=0$ ist der Kreis $\Sigma=0$ selber; das Quadrat des Radius des Kreises $\Sigma=0$ ist darnach $\frac{1}{4}\mathbf{c}^2$ d. i. $\frac{1}{4}\frac{\Delta^3 A}{A^2}$ oder $-\frac{\Delta^3}{\lambda}$.

Im Falle des hyperbolischen Kreises sind die reellen Kreispunkte dessen unendlich ferne Punkte; die hyperbolischen Brennpunkte, der Kreis $-8J^2\Delta\boldsymbol{P}+A\boldsymbol{\Sigma}=0$ und der Kreis $-4J^2\Delta\boldsymbol{P}+A\boldsymbol{\Sigma}=0$ fallen mit dem Centrum zusammen, dem Durchschnittspunkte der Polaren der imaginären Kreispunkte, welche der Ort des Durchschnittspunktes zweier zu einander senkrechten Graden des hyperbolischen Kreises sind.

Im Falle der Parabel endlich sind zwei der hyperbolischen Brennpunkte die reellen Kreispunkte — $8J^2\Delta\boldsymbol{P}+A\boldsymbol{\Sigma}=0$ — der Kreis dieser Gleichung degenerirt in sie —, die beiden andern aber, von denen der eine das Centrum ist, sind durch die Gleichung

$$8J^2\Delta^3\boldsymbol{P}+A\,(A\Sigma-\Delta^2\boldsymbol{\Sigma})=0$$

gegeben. Der unendlich ferne Punkt d. i. das Centrum und jeder andere Punkt der ersten Hauptdiametrallinie sind durch eine Gleichung von der Form $\varkappa 8J^2\Delta^3\boldsymbol{P}+\varkappa'\,(A\Sigma-\Delta^2\boldsymbol{\Sigma})=0$ und, weil demgemäss die Polaren dieser Punkte die Gleichung $\varkappa 8J^2\Delta^3\mathfrak{R}+\varkappa'\,(A\mathrm{S}-\Delta^2\mathfrak{S})=0$ repräsentirt, durch diese Gleichung die unendlich ferne Grade und jede zur ersten Hauptdiametrallinie senkrechte Grade darstellbar; so sind die Punkte

$$4J^2\Delta^3\boldsymbol{P}+A\,(A\Sigma-\Delta^2\boldsymbol{\Sigma})=0,$$

weil auch in der Form $-\Delta^2\,(-4J^2\Delta\boldsymbol{P}+A\boldsymbol{\Sigma})+A^2\Sigma=0$, in der $-4J^2\Delta\boldsymbol{P}+A\boldsymbol{\Sigma}=0$ — der Kreis dieser Gleichung degenerirt für die Parabel in einen Punkt — der Pol der ersten Hauptdiametrallinie ist, darstellbar, die auf dieser liegenden Punkte, die sogenannten Scheitelpunkte der Parabel, und die Graden

$$4J^2\Delta^3\mathfrak{R}+A\,(A\mathrm{S}-\Delta^2\mathfrak{S})=0$$

als ihre Polaren die durch sie gehenden zur ersten Hauptdiametrallinie senkrechten Graden. Mit Rücksicht hierauf und beachtend, dass die durch den Punkt $\boldsymbol{P} = 0$ gehende zur ersten Hauptdiametrallinie senkrechte Grade $\mathbf{R} = 0$ ist, erkennt man, dass die durch die Punkte

$$(4J^2\Delta^3 + \varkappa)\,\boldsymbol{P} + \varkappa'\,(\Delta\Sigma - \Delta^2\boldsymbol{\Sigma}) = 0$$

gehenden zur ersten Hauptdiametrallinie senkrechten Graden durch die Gleichung

$$(4J^2\Delta^3 + \varkappa\mu)\,\mathbf{R} + \varkappa'\,(\Delta S - \Delta^2\mathbf{S}) = 0,$$

in der μ eine Constante bedeutet, dargestellt sind, und dass somit, weil durch die Bemerkung, dass umgekehrt die durch die Punkte $(4J^2\Delta^3 + \varkappa\mu)\,\boldsymbol{P} + \varkappa'\,(\Delta\Sigma - \Delta^2\boldsymbol{\Sigma}) = 0$ gehenden senkrechten Graden von der Form $(4J^2\Delta^3 + \varkappa)\,\mathbf{R} + \varkappa'\,(\Delta S - \Delta^2\mathbf{S}) = 0$ sein müssen, $\mu = -1$ sich findet, die durch die Punkte

$$(4J^2\Delta^3 + \varkappa)\,\boldsymbol{P} + \varkappa'\,(\Delta\Sigma - \Delta^2\boldsymbol{\Sigma}) = 0$$

gehenden zur ersten Hauptdiametrallinie senkrechten Graden

$$(4J^2\Delta^3 - \varkappa)\,\mathbf{R} + \varkappa'\,(\Delta S - \Delta^2\mathbf{S}) = 0$$

sind. Daraus nun ist zu ersehen, dass die hyperbolischen Brennpunkte

$$8J^2\Delta^3\boldsymbol{P} + \Delta\,(\Delta\Sigma - \Delta^2\boldsymbol{\Sigma}) = 0$$

die auf der ersten Hauptdiametrallinie liegenden Punkte der Polaren der reellen elliptischen Brennpunkte

$$\Delta S - \Delta^2\mathbf{S} = 0$$

oder also des Ortes des Durchschnittspunktes zweier zu einander senkrechter Graden der Parabel sind, wie es nach dem Prinzip der Continuität in der That sein muss und sich auch ergiebt, wenn der oben in Liniencoordinaten gegebene Kreis in Punktcoordinaten dargestellt wird. Die durch sie gehenden Graden der Parabel gehen durch die reellen Kreispunkte.

Es sei an dieser Stelle noch bemerkt, dass, da der eine der Punkte

$$\varkappa 8J^2\Delta^3\boldsymbol{P} + \varkappa'\,(\Delta\Sigma - \Delta^2\boldsymbol{\Sigma}) = 0$$

als das Centrum der Parabel in der Form

$$(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13},\ \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23},\ \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33})$$

bekannt ist, der andere, weil die Producte ihrer Coordinaten

den drei ersten Coefficienten der Gleichung proportional sein müssen, durch die Form

$$\left(\varkappa 8J^2\varDelta(\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13})+\varkappa'\cdot\frac{A\alpha_{11}-\varDelta^2 s_1^2}{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}},\right.$$
$$\varkappa 8J^2\varDelta(\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23})+\varkappa'\cdot\frac{A\alpha_{22}-\varDelta^2 s_2^2}{\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}},$$
$$\left.\varkappa 8J^2\varDelta(\alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{33})+\varkappa'\cdot\frac{A\alpha_{33}-\varDelta^2 s_3^2}{\alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{33}}\right)$$

dargestellt ist, und dass für ihn, weil auch in der Form

$$\left(\varkappa\left(8J^2\varDelta(\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13})+A\cdot\frac{A\alpha_{11}-\varDelta^2 s_1^2}{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}}\right)\right.$$
$$\left.+(\varkappa'-A\varkappa)\cdot\frac{A\alpha_{11}-\varDelta^2 s_1^2}{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}},\ --,\ --\right)$$

darstellbar, und den (nicht unendlich fernen) hyperbolischen und elliptischen Brennpunkt, deren Coordinaten in dieser Form erscheinen, nach der Formel 9. des 8. Abschnitts des ersten Theils — wir bezeichnen die drei Punkte durch P, **B**, B — die Relation $A\varkappa\,.\,\mathbf{B}P+(\varkappa'-A\varkappa)\,.\,BP=0$ oder

$$A\varkappa\,.\,B\mathbf{B}=\varkappa'\,.\,BP$$

besteht; nach ihr ist der (nicht unendlich ferne) Scheitelpunkt der Parabel der Mittelpunkt der ersten Hauptdiametrallinie in Bezug auf den elliptischen und hyperpolischen Brennpunkt.

23. Die imaginären und reellen Kreispunkte sind hiernach für die Kegelschnitte von einander entsprechender Bedeutung. In der That sind auch, wie die durch die reellen Kreispunkte gehenden Diametrallinien die inneren Winkelhalbirungslinien, die durch die imaginären Kreispunkte gehenden Diametrallinien die äusseren Winkelhalbirungslinien des Centrums in Bezug auf die Hauptdiametrallinien. Denn, wenn wir in Erinnerung daran, dass der innere und der äussere Mittelpunkt einer Graden in Bezug auf zwei Punkte derselben beziehungsweise durch die Relationen

$$AB=BA',\ AB=A'B$$

und die (inneren) Winkelhalbirungslinien eines Punktes in Bezug auf zwei Grade desselben durch die Relation

$$AB=BA'$$

gekennzeichnet sind, in gleicher Weise die durch die Relation

$$AB = A'B$$

gekennzeichneten Graden als die äusseren Winkelhalbirungslinien des Punktes in Bezug auf jene Graden auffassen, so besteht für jede derselben, wenn sie durch $|x, x'|$ und jene Graden durch die Formen $|a_1, a_2, a_3|$, $|a'_1, a'_2, a'_3|$ gegeben werden, wegen $\operatorname{tg} AB = \operatorname{tg} A'B$ nach dem 7. Abschnitte des ersten Theiles die Gleichung

$$s_1^2 (xa_1 + x'a'_1)^2 + - -$$
$$- 2s_2s_3 \cos A_1 (xa_2 + x'a'_2)(xa_3 + x'a'_3) - - - - = 0,$$

die sie als eine Grade der imaginären Kreispunkte charakterisirt. Wie die äusseren Mittelpunkte der Graden auf der unendlich fernen Graden liegen, so gehen die äusseren Winkelhalbirungslinien der Punkte durch die imaginären Kreispunkte.

24. Die merkwürdigste Eigenschaft der elliptischen und hyperbolischen Brennpunkte ist die folgende. Die durch einen jeden der elliptischen Brennpunkte gehenden Graden des Kegelschnitts sind als Grade der imaginären Kreispunkte auf sich selbst senkrecht, und daher sind jede zwei in Bezug auf den Kegelschnitt polar conjugirte Grade eines jeden elliptischen Brennpunktes in Bezug auf die durch ihn gehenden Graden des Kegelschnitts Winkelhalbirungslinien oder zu einander senkrecht; die durch einen jeden der hyperbolischen Brennpunkte gehenden Graden des Kegelschnitts dagegen sind zu einander senkrecht und somit sie selbst die Winkelhalbirungslinien jeder zwei in Bezug auf den Kegelschnitt polar conjugirter Graden jenes hyperbolischen Brennpunkts.

Die elliptischen Brennpunkte sind die einzigen Punkte von der bezeichneten Eigenschaft, die hyperbolischen dagegen nicht, indem jeder Punkt des durch sie gehenden Kreises deren Eigenschaft besitzt. Und das kommt daher. Die von den unendlich fernen Punkten jeder zwei zu einander senkrechten Diametrallinien ausgehenden vier Graden des Kegelschnitts gehen zu zweien durch vier Punkte des eben bezeichneten Kreises; zu diesen vier Graden gehört als Diagonaldreieck

ein in Bezug auf den Kegelschnitt sich selbst polar conjugirtes Dreieck, dessen eine Seitenlinie die unendlich ferne Grade und dessen ein Eckpunkt das Centrum ist, und es sind daher die durch jene vier Punkte gehenden Diametrallinien in Bezug auf den Kegelschnitt polar conjugirte Grade und jene zu einander senkrechten Diametrallinien in Bezug auf sie Winkelhalbirungslinien. Die von den unendlich fernen Punkten der inneren Winkelhalbirungslinien des Centrums in Bezug auf jede zwei polar conjugirte Diametrallinien ausgehenden Graden des Kegelschnitts bestimmen demnach immer vier Punkte von der genannten Eigenschaft der hyperbolischen Brennpunkte, und es giebt daher unendlich viele solcher Punkte, weil es unendlich vieler solcher inneren Winkelhalbirungslinien giebt; die Anzahl aber der in gleicher Weise durch die äusseren Winkelhalbirungslinien bestimmten Punkte von der Eigenschaft der elliptischen Brennpunkte ist nur vier, weil die äusseren Winkelhalbirungslinien des Centrums in Bezug auf jede zwei polar conjugirte Diametrallinien dieselben Graden, die durch die imaginären Kreispunkte gehenden Diametrallinien sind.

25. Bezeichnen die Gleichungen $S' = 0$, $S'' = 0$ je eine Grade, so sind jede zwei in Bezug auf sie harmonisch conjugirte Grade durch die Gleichung $\varkappa' S' + \varkappa'' S'' = 0$ dargestellt, und es gelten, wenn jene Graden Grade der elliptischen Brennpunkte $(\mathcal{A} + \mathbf{A})\, \Sigma - 2\Delta^2 \mathbf{\Sigma} = 0$ und diese zu einander senkrecht sind, für sie die Gleichungen

$$(\mathcal{A} + \mathbf{A})\, \Sigma_{a'} - 2\Delta^2 \mathbf{\Sigma}_{a'} = 0, \quad (\mathcal{A} + \mathbf{A})\, \Sigma_{a''} - 2\Delta^2 \mathbf{\Sigma}_{a''} = 0,$$

$$\varkappa' \mathbf{\Sigma}_{a'} + \varkappa'' \mathbf{\Sigma}_{a''} = 0$$

und demzufolge auch die Gleichung

$$(\mathcal{A} + \mathbf{A})\, (\varkappa' \Sigma_{a'} + \varkappa'' \Sigma_{a''}) = 0$$

oder

$$(\mathcal{A} + \mathbf{A})\, (\alpha_{11} (\varkappa' a'_{11} + \varkappa'' a''_{11}) + \cdots$$
$$+ 2\alpha_{23} (\varkappa' a'_{23} + \varkappa'' a''_{23}) + \cdots) = 0.$$

Daraus folgt: *Die Winkelhalbirungslinien eines jeden Punktes in Bezug auf die zwei durch ihn gehenden Graden der elliptischen Brennpunkte einer Hauptdiametrallinie sind polar conjugirte Grade in Bezug auf den Kegelschnitt.* Und insbesondere sind daher *jede Grade des Kegelschnitts und* die zu ihr senkrechte

Grade — die Normallinie — des zu ihr gehörigen Punktes des Kegelschnitts Winkelhalbirungslinien dieses Punktes in Bezug auf die durch ihn gehenden Graden der elliptischen Brennpunkte einer Hauptdiametrallinie. In diesem Satze liegt dem bekannten Reflexionsgesetze zufolge der Grund des Namens Brennpunkte.

26. Der Pol einer Graden eines elliptischen Brennpunktes ist der auf dessen Leitlinie — die Polaren der Brennpunkte werden Leitlinien genannt — liegende Punkt der zu ihr senkrechten Graden des Brennpunkts; die durch diesen Punkt gehende Diametrallinie und jene Grade sind daher polar conjugirte Grade in Bezug auf den Kegelschnitt, und es gilt der Satz: Jede Diametrallinie ist der Ort der Mittelpunkte aller Graden, die derjenigen unter den durch einen elliptischen Brennpunkt gehenden Graden parallel sind, welche auf der Verbindungslinie dieses Brennpunkts mit dem Durchschnittspunkt der Leitlinie desselben und der Diametrallinie senkrecht steht. Insbesondere ist demnach die Verbindungslinie eines elliptischen Brennpunkts mit dem Durchschnittspunkte der Leitlinie desselben und einer harmonischen Hauptdiametrallinie auf dieser senkrecht.

27. Die durch die Gleichungen

$$(\boldsymbol{A}\varkappa - \varkappa')\, 16\mathrm{J}^2\Delta^3\boldsymbol{P} + (\boldsymbol{A} - \mathcal{A})\,\varkappa'\mathrm{B} = 0$$

$$(\mathcal{A}\varkappa - \varkappa')\, 16\mathrm{J}^2\Delta^3\boldsymbol{P} + (\mathcal{A} - \boldsymbol{A})\,\varkappa'\boldsymbol{B} = 0$$

gegebenen Punkte liegen nach den Formeln des 21. Abschnitts vom Centrum ab in der quadratischen Entfernung

$$\mathrm{h}^2 = \frac{\Delta^3 \frac{\varkappa'}{\varkappa}}{\mathcal{A}^2}.$$

Diese Gleichungen lassen sich nun sowohl in der Form

$$\varkappa' 8\mathrm{J}^2 \mathcal{A}\Sigma - \Delta^2\left(-(\boldsymbol{A}\varkappa - \varkappa')\, 8\mathrm{J}^2\Delta\boldsymbol{P} + (\boldsymbol{A} - \mathcal{A})\,\varkappa'\boldsymbol{\Sigma}\right) = 0$$

als auch in der Form

$$-2\boldsymbol{A}\left(-\varkappa 4\mathrm{J}^2\Delta\boldsymbol{P} + \varkappa'\boldsymbol{\Sigma}\right) + \varkappa'\left(-8\mathrm{J}^2\boldsymbol{\Gamma} + (\mathcal{A} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{\Sigma}\right) = 0$$

schreiben; es erhellt daraus, dass die auf den Hauptdiametrallinien in der quadratischen Entfernung

$$\mathrm{h}^2 = \frac{\Delta^3 \frac{\varkappa'}{\varkappa}}{\mathcal{A}^2}$$

vom Centrum ab liegenden Punkte Punkte des Kreises

$$-\varkappa 4J^2 \varDelta \boldsymbol{P} + \varkappa' \boldsymbol{\Sigma} = 0$$

— die obige Grösse ist demnach das Quadrat seines Radius — und die durch sie gehenden Graden des Kegelschnitts zugleich auch Grade des Kreises

$$-(\boldsymbol{A}\varkappa - \varkappa')\, 8J^2 \varDelta \boldsymbol{P} + (\boldsymbol{A} - \mathcal{A})\, \varkappa' \boldsymbol{\Sigma} = 0$$

sind.

Insbesondere ergiebt sich hieraus, dass die hyperbolischen Brennpunkte von allen Punkten, die auf den beiden Hauptdiametrallinien in gleicher Entfernung vom Centrum ab liegen, die einzigen sind, welche die Eigenschaft haben, dass die durch sie gehenden Graden des Kegelschnitts zugleich Grade eines und nur eines Kreises vom selben Centrum — des Kreises $-8J^2 \varDelta \boldsymbol{P} + \mathcal{A} \boldsymbol{\Sigma} = 0$ — sind, wie es in der That auch nicht anders sein kann.

In der quadratischen Entfernung

$$b^2 = \frac{\varDelta^3 \frac{\mathcal{A} + \boldsymbol{A}}{2}}{\mathcal{A}^2} = c^2 \cdot \frac{\mathcal{A} + \boldsymbol{A}}{2\boldsymbol{A}} = \mathbf{c}^2 \cdot \frac{\boldsymbol{A} + \mathcal{A}}{2\mathcal{A}}$$

vom Centrum liegen die Punkte

$16J^2 \varDelta \boldsymbol{P} + (\mathcal{A} + \boldsymbol{A})\, B = 0$ oder $16J^2 \varDelta \boldsymbol{P} + (\mathcal{A} + \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{B} = 0$

— die Gleichungen 25. und 26. stellen nur für $\varkappa = 1$, $\varkappa' = \mathcal{A} + \boldsymbol{A}$ ein und dieselben Punkte dar — oder, weil auch durch die Gleichung

$$(\mathcal{A} + \boldsymbol{A})\, \mathcal{A} \Sigma - \varDelta^2 \left(-8J^2 \boldsymbol{\Gamma} + (\mathcal{A} + \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{\Sigma}\right) = 0$$

darstellbar, die auf den Hauptdiametrallinien liegenden Punkte — die sogenannten Scheitelpunkte — des Kegelschnitts. Der durch sie gehende Kreis oder vielmehr die beiden durch sie gehenden Kreise vom selben Centrum — die Scheitelkreise — sind durch die Gleichung

$$-8J^2 \varDelta \boldsymbol{P} + (\mathcal{A} + \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{\Sigma} = 0$$

oder also nach dem 14. Abschnitte durch die Gleichung

$$8J^2 \varDelta^3 \mathbf{R} + (\mathcal{A} + \boldsymbol{A})\, (\mathcal{A} \mathrm{S} - \varDelta^2 \mathbf{S}) = 0$$

gegeben; für die Parabel degeneriren sie in Grade.

Drittes Kapitel.

Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte.

---

28. Für die folgenden Untersuchungen ist es nothwendig, abkürzende Bezeichnungen für häufig wiederkehrende Coefficientenfunctionen einzuführen. Man pflegt zunächst

$$c^2 = e^2 b^2$$

zu setzen und nennt die Grösse e^2 die (elliptische) Excentricität des Kegelschnitts; wir setzen zu dem in Uebereinstimmung mit dem ersten Theile

$$e^2 = 1 + a$$

und nennen die Grösse a die elliptische Characteristik des Kegelschnitts. Es ist

$$e^2 = \frac{2A}{\mathcal{A} + A}, \quad a = \frac{A - \mathcal{A}}{A + \mathcal{A}}.$$

Die elliptische Characteristik ist für die Ellipse negativ, für die Hyperbel positiv und für die Parabel zugleich negativ und positiv d. h. Null oder unendlich, für den elliptischen Kreis die negative und für den hyperbolischen Kreis die positive Einheit. Und darnach bestimmt sich die Grösse e^2; insbesondere ist für den elliptischen Kreis $e^2 = 0$, für den hyperbolischen Kreis $e^2 = 2$ und für die Parabel $e^2 = 1$ und $e^2 = \infty$.

In analoger Weise verstehen wir unter der hyperbolischen Excentricität und Characteristik des Kegelschnitts die Grössen

$$\mathbf{e}^2 = \frac{2\mathcal{A}}{A + \mathcal{A}}, \quad \mathbf{a} = \frac{\mathcal{A} - A}{\mathcal{A} + A};$$

sie stehen zum Kegelschnitt zufolge der Gleichungen

$$e^2 + \mathbf{e}^2 = 2, \quad a + \mathbf{a} = 0$$

in dem umgekehrten Verhältniss.

Und endlich setzen wir fest, dass ein wagerechter Strich über den eingeführten Buchstaben, wie überhaupt, bedeuten soll, dass in den durch sie dargestellten Functionen $-\mathcal{A}$ an die Stelle von $\mathcal{A}$ getreten ist, so dass also z. B. $\bar{a} = \dfrac{A + \mathcal{A}}{A - \mathcal{A}}$ ist.

29. Bezeichnet man den senkrechten Abstand eines Punktes $\Sigma' = 0$ von der zweiten Hauptdiametrallinie $-8J^2\mathfrak{G} + (A - \boldsymbol{A})\mathfrak{S} = 0$ oder

$$-8J^2(\Delta^3\mathfrak{R} - \Delta S) + (A - \boldsymbol{A})\Delta^2\mathfrak{S} = 0$$

— wir denken der Grösse $\boldsymbol{A}$ das das Product $\Delta^3\boldsymbol{A}$ positiv machende Vorzeichen beigelegt — durch x', so ist er nach Formel 14. des 8. Abschnitts durch die Gleichung

$$(8J^2 A\Delta + (A - \boldsymbol{A})(\Delta^2 + 8J^2\Delta))\mathfrak{R}_{\alpha'}x'^2 =$$
$$4J^2(-8J^2(\Delta^3\mathfrak{R}_{\alpha'} - \Delta^3 S_{\alpha'}) + (A - \boldsymbol{A})\Delta^2\mathfrak{S}_{\alpha'})$$

oder, wie man nach Multiplication mit $-8\Delta^2$ und nachheriger Division mit $(A - \boldsymbol{A})^2$ findet, durch die Gleichung

$$4A\Delta^2\mathfrak{R}_{\alpha'}x'^2 = (A + \boldsymbol{A})((A + \boldsymbol{A})(\Delta^3\mathfrak{R}_{\alpha'} - \Delta S_{\alpha'})$$
$$+ 2A\Delta^2\mathfrak{S}_{\alpha'})$$

oder endlich durch die Gleichung

$$\frac{x'^2}{b^2} = \frac{(A + \boldsymbol{A})(\Delta^3\mathfrak{R}_{\alpha'} - \Delta S_{\alpha'}) + 2A\Delta^2\mathfrak{S}_{\alpha'}}{2A\Delta^3\mathfrak{R}_{\alpha'}}$$

gegeben, und in gleicher Weise gilt demnach für den senkrechten Abstand des Punktes von der ersten Hauptdiametrallinie — wir bezeichnen ihn durch $\acute{x}$ — die Gleichung

$$\frac{\acute{x}^2}{\bar{b}^2} = \frac{(A - \boldsymbol{A})(\Delta^3\mathfrak{R}_{\alpha'} - \Delta S_{\alpha'}) + 2A\Delta^2\mathfrak{S}_{\alpha'}}{-2A\Delta^3\mathfrak{R}_{\alpha'}}.$$

Die Addition und Subtraction dieser Gleichungen führt auf die Gleichungen

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{\acute{x}^2}{\bar{b}^2} = 1 - \beta'^2,\quad \beta'^2 = \frac{\Delta S_{\alpha'}}{\Delta^3\mathfrak{R}_{\alpha'}}$$

$$\frac{x'^2}{b^2} - \frac{\acute{x}^2}{\bar{b}^2} = 1 - \beta'^2,$$

$$\beta'^2 = \frac{(A(\Delta^3\mathfrak{R}_{\alpha'} - \Delta S_{\alpha'}) + 2A\Delta^2\mathfrak{S}_{\alpha'}) - \boldsymbol{A}\Delta\mathfrak{R}_{\alpha'}}{-\boldsymbol{A}\Delta\mathfrak{R}_{\alpha'}}$$

und damit insbesondere auf die für jeden Punkt des Kegelschnitts geltende Relation

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{\acute{x}^2}{\bar{b}^2} = 1.$$

Für den durch die Scheitelpunkte der ersten Hauptdiametrallinie gehenden Kreis z. B. ist darnach

$$x^2 + \bar{x}^2 = b^2$$

und demgemäss, wenn $x^2 = x'^2$ angenommen wird, in Rücksicht auf die Relation $\bar{b}^2 = \mathbf{a} b^2$

$$\acute{x}^2 = \mathbf{a}\bar{x}^2.$$

30. Der auf einer Hauptdiametrallinie liegende Punkt der zu ihr senkrechten Graden des Punktes $\Sigma' = 0$ und der auf ihr liegende Punkt — seine Entfernung vom Centrum sei y' resp. $\acute{y}'$ — seiner Polare sind, da die Polare dieses Punktes jene senkrechte Grade ist, in Bezug auf den Kegelschnitt polar und somit in Bezug auf die Scheitelpunkte desselben harmonisch conjugirt, und also

$$x'^2 y'^2 = b^4, \quad \acute{x}^2 \acute{y}^2 = \bar{b}^4.$$

31. Die senkrechten Abstände eines Punktes des Kegelschnitts von den Hauptdiametrallinien sind, wenn

$$\alpha'^2 = -\frac{\Delta^2 \mathbf{S}_{\alpha'}}{\Delta \mathbf{B}_{\alpha'}}$$

gesetzt wird, durch die Gleichungen

$$e^2 x'^2 = b^2 - \alpha'^2, \quad \bar{e}^2 \acute{x}^2 = \bar{b}^2 - \alpha'^2$$

oder auch, wenn

$$r^2 = \mathbf{a}\bar{b}^2 = \frac{8 \,.\, 16 J^4 \Delta^3}{(\Delta + \mathbf{\Delta})^3}, \quad n'^2 = \mathbf{a}\alpha'^2 = \frac{16 J^2 \Delta^2 \mathbf{S}_{\alpha'}}{(\Delta + \mathbf{\Delta})^2 \, \mathbf{B}_{\alpha'}}$$

gesetzt wird, durch die Gleichungen

$$\bar{e}^2 x'^2 = -\bar{r}^2 + \acute{\bar{n}}^2, \quad e^2 \acute{x}^2 = -r^2 + n'^2$$

gegeben; diese letztere Form ist besonders für die Parabel von Wichtigkeit, weil in derselben auch der senkrechte Abstand eines Punktes der Parabel von der ersten Hauptdiametrallinie vollständig bestimmt erscheint, da für sie

$$r^2 = \frac{16 J^4 \Delta^3}{\mathbf{\Delta}^3}, \quad n'^2 = \frac{4 J^2 \Delta^2 \mathbf{S}_{\alpha'}}{\mathbf{\Delta}^2 \mathbf{B}_{\alpha'}}$$

ist.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich zuvörderst unter Beachtung der Relationen $e^2 - a\bar{e}^2 = 0$, $\bar{b}^4 - a^2b^4 = 0$ die Gleichungen

$$\frac{\bar{x}'^2}{x'^2} = a \cdot \frac{\bar{b}^2 - \alpha'^2}{b^2 - \alpha'^2}, \quad \frac{\bar{y}'^2}{y'^2} = a \cdot \frac{b^2 - \alpha'^2}{\bar{b}^2 - \alpha'^2}$$

und damit offenbar die Tangentenquadrate der Winkel φ', χ', welche die durch den Punkt $\Sigma' = 0$ gehende Diametrallinie und die durch ihn gehende Grade des Kegelschnitts mit der ersten Hauptdiametrallinie bildet, in der Form

$$\operatorname{tg}^2 \varphi' = a \cdot \frac{\bar{b}^2 - \alpha'^2}{b^2 - \alpha'^2}, \quad \operatorname{tg}^2 \chi' = a \cdot \frac{b^2 - \alpha'^2}{\bar{b}^2 - \alpha'^2}.$$

Die der durch den Punkt $\Sigma' = 0$ gehenden Diametrallinie polar conjugirte Diametrallinie ist der durch ihn gehenden Graden des Kegelschnitts parallel; diese Graden bilden somit gleiche Winkel mit der ersten Hauptdiametrallinie, und es muss daher, wenn einer von den auf jener Diametrallinie liegenden Punkten des Kegelschnitts durch die Gleichung $\Sigma'' = 0$ gegeben und die analogen Bezeichnungen gewählt werden,

$$\frac{\bar{b}^2 - \alpha''^2}{b^2 - \alpha''^2} = \frac{b^2 - \alpha'^2}{\bar{b}^2 - \alpha'^2}$$

oder also wegen $b^2 - \bar{b}^2 = c^2$, $b^2 + \bar{b}^2 = \mathfrak{c}^2$ in entwickelter Form

$$c^2 (\alpha'^2 + \alpha''^2) = c^2 \mathfrak{c}^2$$

sein. Die Gleichung

$$\alpha'^2 + \alpha''^2 = \mathfrak{c}^2$$

giebt demnach die Bedingung an, unter welcher die Punkte des Kegelschnitts $\Sigma' = 0$, $\Sigma'' = 0$ zwei polar conjugirten Diametrallinien angehören; im Falle des elliptischen Kreises ist sie nicht hinreichend.

In Folge der Gleichungen

$$\frac{b^2}{e^2} + \frac{\bar{b}^2}{\bar{e}^2} = \mathfrak{c}^2, \quad \frac{1}{e^2} + \frac{1}{\bar{e}^2} = 1$$

ist daher

$$x'^2 + \bar{x}'^2 = \mathfrak{c}^2 - \alpha'^2 = \alpha''^2.$$

Daraus folgt, dass der Ausdruck α'^2 das Quadrat der Ent-

fernung der auf der, der Diametrallinie des Punktes $\Sigma' = 0$ polar conjugirten Diametrallinie liegenden Punkte des Kegelschnitts vom Centrum — das Quadrat der halben Länge dieser Diametrallinie — darstellt; und die gefundene Bedingungsgleichung ist der Ausdruck dafür, dass die Summe der Quadrate der halben Längen je zweier polar conjugirter Diametrallinien constant der Grösse $\mathbf{c}^2$ gleich ist.

Im Falle des hyperbolischen Kreises ist $\mathbf{c}^2 = 0$; das Quadrat der halben Länge einer jeden Diametrallinie des hyperbolischen Kreises ist gleich dem negativen Quadrate der halben Länge der ihr polar conjugirten Diametrallinie, im Gegensatz zum elliptischen Kreise, für den das Quadrat der halben Länge einer Diametrallinie gleich ist dem positiven Quadrate der halben Länge der ihr polar conjugirten Diametrallinie.

Im Allgemeinen giebt es nur zwei polar conjugirte Diametrallinien, für welche die Quadrate ihrer halben Längen einander gleich sind; es sind dies, da deren Grösse offenbar $\frac{1}{2}\mathbf{c}^2$ ist, die durch die Durchschnittspunkte des Kegelschnitts und des Kreises $-8J^2\Delta P + \Delta\Sigma = 0$ gehenden Diametrallinien. Die Gleichung $\alpha'^2 = \frac{1}{2}\mathbf{c}^2$ macht

$$\frac{\bar{\mathfrak{b}}^2 - \alpha'^2}{\mathfrak{b}^2 - \alpha'^2} = -1,$$

und es ist also das Tangentenquadrat des von diesen Diametrallinien mit der ersten Hauptdiametrallinie gebildeten Winkels die Grösse $\mathbf{a}$; die Gleichung

$$\frac{\bar{\mathfrak{b}}^2 - \alpha'^2}{\mathfrak{b}^2 - \alpha'^2} = +1$$

giebt $\alpha'^2 = \infty$, also $\mathbf{R}_{\alpha'} = 0$ und bezeichnet so den Punkt $\Sigma' = 0$ als auf der unendlich fernen Graden liegend; das Tangentenquadrat für die harmonischen Hauptdiametrallinien, für welche allein die Quadrate ihrer halben Längen sich entgegengesetzt gleich sind, ist somit die Grösse a und demzufolge sind wegen der Relation $a + \mathbf{a} = 0$ jene Diametrallinien die anharmonischen Hauptdiametrallinien (die gleichen Durchmesser). Jede harmonische Hauptdiametrallinie bildet demnach mit der ersten Hauptdiametral-

linie einen Winkel, dessen Tangentenquadrat die elliptische, und jede anharmonische einen Winkel, dessen Tangentenquadrat die hyperbolische Characteristik ist.

Aus der Bedingungsgleichung $\alpha'^2 = \frac{1}{2}\mathbf{c}^2$ oder vielmehr aus der ihr gleichbedeutenden Gleichung $\mathcal{A}\Delta^3\mathbf{R}_{\alpha'} + 2\mathcal{A}\Delta^2\mathbf{S}_{\alpha'} = 0$ und aus dem Umstande, dass jede Diametrallinie durch den Durchschnittspunkt der harmonischen Hauptdiametrallinien $\Delta^3\mathbf{R} - \mathcal{A}S = 0$ und der Polaren der imaginären Kreispunkte $\mathbf{S} = 0$ geht, ergiebt sich sofort die Gleichung der anharmonischen Hauptdiametrallinien in der Form

$$\mathcal{A}(\Delta^3\mathbf{R} - \mathcal{A}S) + 2\mathcal{A}\Delta^2\mathbf{S} = 0$$

oder

$$\mathcal{A}\mathbf{G} + 2\mathcal{A}\mathbf{S} = 0.$$

Die anharmonischen Hauptdiametrallinien sind reell und imaginär, wo die harmonischen imaginär und reell sind, also reell für die Ellipse und imaginär für die Hyperbel.

Wir bemerken, dass für zwei polar conjugirte Diametrallinien, weil sie in Bezug auf die harmonischen Hauptdiametrallinien harmonisch oder in Bezug auf die anharmonischen anharmonisch conjugirt sind, die Relation

$$\mathrm{tg}\varphi'\,\mathrm{tg}\varphi'' = \mathrm{a}$$

besteht.

Zwischen den senkrechten Abständen der dem Kegelschnitt angehörigen Punkte polar conjugirter Diametrallinien von den Hauptdiametrallinien haben wegen der Relationen $2\mathrm{b}^2 = \mathrm{c}^2 + \mathbf{c}^2$, $\mathrm{c}^2 = \mathrm{b}^2\mathrm{e}^2$ und der Gleichung

$$(\mathrm{b}^2 - \alpha'^2)(\bar{\mathrm{b}}^2 - \alpha'^2) = (\mathrm{b}^2 - \alpha''^2)(\bar{\mathrm{b}}^2 - \alpha''^2)$$
$$= \mathrm{b}^2\bar{\mathrm{b}}^2 - \alpha'^2\alpha''^2$$

die Relationen

$$\mathrm{x}'^2 + \mathrm{x}''^2 = \mathrm{b}^2, \ \acute{\mathrm{x}}^2 + \acute{\mathrm{x}}'^2 = \bar{\mathrm{b}}^2, \ \mathrm{x}'^2\acute{\mathrm{x}}^2 = \mathrm{x}''^2\acute{\mathrm{x}}'^2$$

statt.

Die Entfernung derjenigen Punkte des Kegelschnitts, welche zugleich Punkte der zu der ersten Hauptdiametrallinie senkrechten Graden eines Brennpunkts sind, von einander nennt man den (ersten) Parameter des Kegelschnitts. Für

die elliptischen Brennpunkte ist $x'^2 = c^2$ und für die hyperbolischen $x'^2 = \mathfrak{c}^2$; man findet darnach den halben elliptischen und hyperbolischen ersten Parameter in der Form

$$r^2 = \mathfrak{a}\bar{b}^2, \quad \mathfrak{r}^2 = a\bar{b}^2.$$

Die Quadrate der Sinus und Cosinus der Winkel φ' und χ' sind

$$\sin^2\varphi' = \frac{\bar{b}^2 - \alpha'^2}{\bar{e}^2\alpha''^2}, \quad \cos^2\varphi' = \frac{b^2 - \alpha'^2}{e^2\alpha''^2}$$

$$\sin^2\chi' = -\frac{b^2 - \alpha'^2}{\bar{e}^2\alpha'^2}, \quad \cos^2\chi' = -\frac{\bar{b}^2 - \alpha'^2}{e^2\alpha'^2}.$$

Der Ausdruck $\acute{x}^2 : \cos^2\chi'$ d. i. die quadratische Entfernung des Punktes $\Sigma' = 0$ von dem Durchschnittspunkte der durch ihn gehenden Normallinie und der ersten Hauptdiametrallinie ist hiernach $\mathfrak{a}\alpha'^2$ und also

$$n'^2 = \mathfrak{a}\alpha'^2$$

das Quadrat der sogenannten (ersten) Normale des Punktes des Kegelschnitts. Daraus ergeben sich weiter u. a. die Relationen

$$n'^2 + n''^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{c}^2, \quad n'^2\acute{n}^2 = \alpha'^4, \quad n'^2 = \mathfrak{a}^2\acute{n}^2.$$

Die Gleichung $e^2\acute{x}^2 = -r^2 + n'^2$ nimmt für die Parabel die Form $\acute{x}^2 + r^2 = n'^2$ und deutet nunmehr den Satz an: Die quadratische Entfernung der auf der Normallinie und der zu der ersten Hauptdiametrallinie senkrechten Graden eines Punktes der Parabel liegenden Punkte der ersten Hauptdiametrallinie (das Quadrat der Subnormale) ist constant gleich r^2.

Der Punkt $\Sigma' = 0$ liegt auf einer elliptischen Leitlinie, wenn $\mathfrak{S}_{\alpha'} = 0$ und also $\alpha'^2 = 0$ ist, und auf einer hyperbolischen, wenn $-8J^2\mathfrak{G}_{\alpha'} + \varDelta\mathfrak{S}_{\alpha'} = 0$ und also $\alpha'^2 = -\frac{8J^2\varDelta^3}{AA}$ $= \frac{2b^2\bar{b}^2}{\mathfrak{c}^2}$ ist; daher ist der senkrechte Quadratabstand des Centrums von den zu den Brennpunkten der ersten Hauptdiametrallinie gehörigen — der zweiten parallelen — Leitlinien beziehungsweise

$$\frac{b^2}{e^2}, \quad \frac{b^2}{\mathfrak{e}^2}.$$

Auch erkennt man, da $\mathfrak{S} = 0$ die Polaren der imaginären Kreispunkte darstellt, dass die Quadrate der halben Längen der äusseren Winkelhalbirungsdiametrallinien der Null, und da $-8J^2\mathfrak{G} + \varDelta\mathfrak{S}$ die Polaren der reellen Kreispunkte sind, dass die Quadrate der halben Längen der inneren Winkelhalbirungsdiametrallinien (in Bezug auf die Hauptdiametrallinien) der Grösse $\frac{2b^2\bar{b}^2}{c^2}$ oder also dem harmonischen Mittel zwischen den Grössen b^2 und $\bar{b}^2$ gleich sind.

32. Der senkrechte Abstand des Centrums des Kegelschnitts $P = 0$, des Pols der unendlich fernen Graden $\mathfrak{R} = 0$, von der Polare des beliebigen Punktes $\Sigma' = 0$ ist nach der Formel 16. des 10. Abschnitts durch die Gleichung

$$A^2\mathfrak{S}_{\alpha'}\cdot m'^2 = 4J^2\varDelta^4\mathfrak{R}_{\alpha'}.$$

oder wegen $-\frac{4J^2\varDelta^6}{A^3} = \frac{\varDelta^6(A^2 - A^2)}{4A^4} = b^2\bar{b}^2$ durch die Gleichung

$$\varDelta^2\mathfrak{S}_{\alpha'}\cdot m'^2 = -b^2\bar{b}^2\varDelta\mathfrak{R}_{\alpha'}.$$

gegeben.

Insbesondere ist der senkrechte Abstand des Centrums von der einem Punkte des Kegelschnitts $\Sigma' = 0$ zugehörigen Graden desselben durch die Gleichung

$$\alpha'^2 m'^2 = b^2\bar{b}^2$$

dargestellt. Hieraus folgt u. a.: Das harmonische Mittel zwischen den senkrechten Quadratabständen des Centrums von zwei jeden zwei polar conjugirten Diametrallinien parallelen Graden des Kegelschnitts ist, reciprok genommen,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m'^2} + \frac{1}{m''^2}\right) = \frac{c^2}{2b^2\bar{b}^2}$$

und daher constant gleich dem harmonischen Mittel zwischen den Grössen b^2 und $\bar{b}^2$ oder gleich dem Quadrate der halben Länge einer jeden der inneren Winkelhalbirungsdiametrallinien. Ferner ist für die Punkte $\alpha'^2 = \frac{1}{2}c^2$ d. i. für die auf den anharmonischen Hauptdiametrallinien, deren

quadratische halbe Längen der Ausdruck $\frac{1}{2}c^2$ angiebt, liegenden Punkte des Kegelschnitts

$$m'^2 = \frac{2b^2\bar{b}^2}{c^2},$$

und es liegen daher die Fusspunkte der Senkrechten aus dem Centrum auf die den auf den anharmonischen Hauptdiametrallinien liegenden Punkten des Kegelschnitts zugehörigen Graden desselben auf dem durch die auf den Winkelhalbirungsdiametrallinien liegenden Punkte des Kegelschnitts gehenden Kreise.

33. Der Winkel zwischen zwei polar conjugirten Diametrallinien — er mag durch ψ bezeichnet werden — ist gleich dem Winkel zwischen der einen und einer von den der andern parallelen Graden des Kegelschnitts, und daher $\alpha''^2 \sin^2 \psi = m'^2$ oder also

$$\alpha'^2\alpha''^2 \sin^2 \psi = b^2\bar{b}^2.$$

Das vierfache Quadrat des Flächeninhalts des durch das Centrum und zwei auf dem Kegelschnitt liegende Punkte zweier polar conjugirter Diametrallinien bestimmten Dreiecks ist demnach constant gleich $b^2\bar{b}^2$.

Das Quadrat der Entfernung eines jeden der auf einer Graden des Kegelschnitts liegenden Punkte der zu ihr senkrechten Graden der elliptischen Brennpunkte der ersten Hauptdiametrallinie von dem Fusspunkte der zu ihr senkrechten Graden des Centrums ist $c^2 . \cos^2 \chi'$ d. i. — $c^2 \cdot \frac{\bar{b}^2 - \alpha'^2}{e^2\alpha'^2}$ oder also der Relation $c^2 = e^2b^2$ zufolge — $m'^2 + b^2$; der Ort der Fusspunkte der zu den Graden des Kegelschnitts senkrechten Graden der Brennpunkte einer Hauptdiametrallinie ist der durch ihre Scheitelpunkte gehende Kreis.

34. Zur Ableitung mehrerer anderer Sätze bedürfen wir die Bezeichnung einiger Punkte durch Buchstaben; wir bezeichnen deshalb den beliebigen Punkt des Kegelschnitts $\Sigma = 0$ durch P', die auf der ersten Hauptdiametrallinie liegenden Punkte der zu ihr senkrechten Graden und der Normallinie

desselben durch O′ und N′, das Centrum des Kegelschnitts durch M, die auf der ersten Hauptdiametrallinie liegenden elliptischen Brennpunkte durch B_1 und B_2, den auf ihr liegenden Punkt der zu dem ersten dieser Punkte gehörigen Leitlinie durch L_1 und die auf dieser Leitlinie liegenden Punkte der zu der ersten Hauptdiametrallinie parallelen und der durch den Punkt B_1 gehenden Graden des Punktes P′ durch R′ und Q′.

Es ist dann zunächst

$$\overline{B_1P'}^2 = (B_1M + MO')^2 + \overline{O'P'}^2 = \overline{B_1M}^2 + \overline{MO'}^2 + \overline{O'P'}^2$$
$$+ 2B_1M \,.\, MO' = c^2 + \alpha''^2 + \frac{2c\sqrt{b^2 - \alpha'^2}}{e}$$
$$= 2b^2 - \alpha'^2 + 2b\sqrt{b^2 - \alpha'^2}$$

oder also

$$\overline{B_1P'}^2 = (b + \sqrt{b^2 - \alpha'^2})^2$$

und hierin offenbar das Vorzeichen der Quadratwurzel positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Punkt M zwischen B_1 und O′ liegt, oder nicht. Mit Rücksicht hierauf und in Folge des Umstandes, dass, wie aus den Gleichungen $\acute{x}^2 = a(x'^2 - b^2)$, $e^2x'^2 = b^2 - \alpha'^2$, deren erste man vermöge der Relation $ab^2 + \bar{b}^2 = 0$ leicht erhält, unter Berücksichtigung der Grössenverhältnisse von a und e^2 und, dass b^2 nach der Relation $c^2 = e^2b^2$ stets positiv ist, hervorgeht, wenigstens für jeden reellen Punkt der Ellipse $b^2 - \alpha'^2 < b^2$ und der Hyperbel $b^2 - \alpha'^2 > b^2$ ist — hiernach geht von zwei polar conjugirten Diametrallinien der Hyperbel die eine durch imaginäre, wenn die andere durch reelle Punkte derselben hindurchgeht —, ergiebt diese Gleichung beziehungsweise für die Ellipse und Hyperbel

$$B_1P' = b + \sqrt{b^2 - \alpha'^2}, \quad B_1P' = \sqrt{b^2 - \alpha'^2} + b$$
$$B_2P' = b - \sqrt{b^2 - \alpha'^2}, \quad B_2P' = \sqrt{b^2 - \alpha'^2} - b$$

und damit für die Ellipse

$$B_1P' + B_2P' = 2b, \quad B_1P' \,.\, B_2P' = + \alpha'^2$$

und für die Hyperbel

$$B_1P' - B_2P' = 2b, \quad B_1P' \,.\, B_2P' = - \alpha'^2.$$

Die Summe der Entfernungen eines Punktes der

Ellipse und die Differenz der Entfernungen eines Punktes der Hyperbel von den elliptischen Brennpunkten der ersten Hauptdiametrallinie ist demnach constant gleich 2b und das Product dieser Entfernungen für die Ellipse gleich der positiven und für die Hyperbel gleich der negativen quadratischen halben Länge der der durch ihn gehenden Diametrallinie polar conjugirten Diametrallinie.

Die Entfernung eines Punktes der Parabel vom (nicht unendlich fernen) Brennpunkte lässt die obige Formel, wenn sie in der Form

$$\overline{B_1P'}^2 = \frac{\alpha'^4}{(b - \sqrt[2]{b^2 - \alpha'^2})^2}$$

geschrieben wird, als durch die Gleichung

$$\overline{B_1P'}^2 = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\Delta \mathbf{S}^2_{\alpha'}}{\Delta \mathbf{R}^2_{\alpha'}}$$

gegeben erscheinen; es ist demnach für die Parabel

$$n'^2 = 2r . B_1P'$$

d. h. das Quadrat der Normale eines Punktes der Parabel gleich dem Product aus seiner Entfernung vom Brennpunkte und dem Parameter. In Folge dieses Satzes ist wegen $\overline{P'O'}^2 = - r^2 + n'^2$

$$\overline{B_1O'}^2 = \overline{B_1P'}^2 - \overline{P'O'}^2 = (B_1P' - r)^2$$

und demgemäss, weil nach einem Satze des 31. Abschnitts

$$r = O'N'$$

ist, $B_1O' = B_1P' - O'N'$ oder

$$B_1N' = B_1P';$$

ein Punkt der Parabel liegt somit vom Brennpunkt eben so weit ab, als der durch seine Normallinie auf der Hauptdiametrallinie bestimmte Punkt.

Der senkrechte Quadratabstand des Centrums von der Leitlinie eines elliptischen Brennpunkts der ersten Hauptdiametrallinie ist $\frac{b^2}{e^2}$, und daher

$$\overline{PR'}^2 = (O'M + ML_1)^2 = \frac{1}{e^2}(b + \sqrt[2]{b^2 - \alpha'^2})^2.$$

Und da nun hierin die Quadratwurzel positiv oder negativ ist, je nachdem der Punkt M zwischen den Punkten O' und L_1 oder also B_1 liegt, oder nicht, so ist

$$\frac{B_1P'}{P'R'} = e$$

d. h. die Entfernung eines Brennpunkts von einem Punkte des Kegelschnitts steht zu dem senkrechten Abstande dieses Punktes von seiner Leitlinie in dem constanten Verhältniss e:1. Der Ort eines Punktes, dessen Entfernung von einem festen Punkte zu seinem senkrechten Abstande von einer festen Graden in constantem Verhältniss steht, ist daher ein Kegelschnitt, und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem dieses Verhältniss kleiner, gleich oder grösser als die Einheit ist.

Ferner ist

$$\frac{P'R'}{B_1L_1} = \frac{P'Q'}{B_1Q'}$$

und folglich, da

$$P'Q' = B_1Q' - B_1P', \; eP'R' = \pm B_1P', \; eB_1L_1 = r$$

ist,

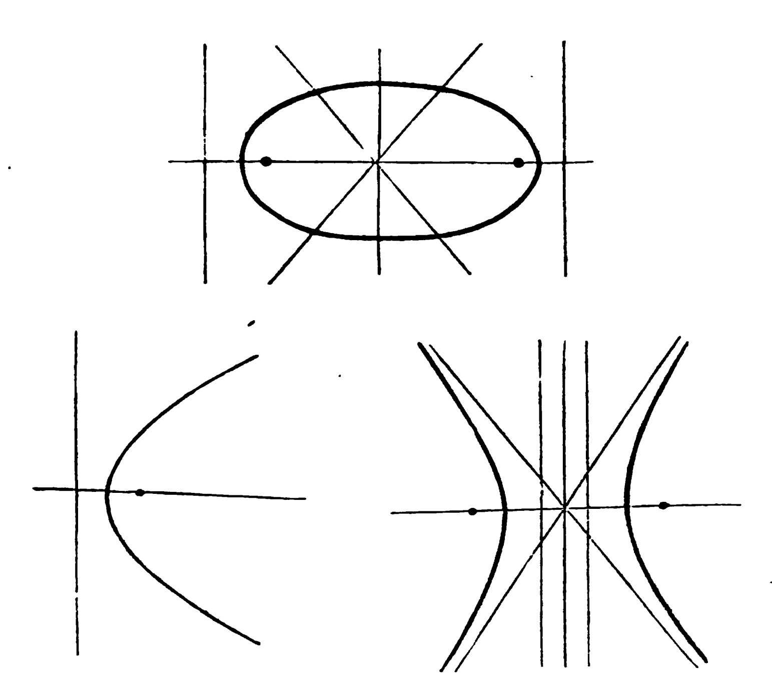
$$\pm B_1P' . B_1Q' = r\,(B_1Q' - B_1P')$$

oder also

$$B_1P' = \frac{r}{\pm 1 + \frac{r}{B_1Q'}}.$$

Diese Relation, in der das Pluszeichen den zwischen den Punkten B_1 und Q' und das Minuszeichen den nicht zwischen ihnen liegenden Punkt des Kegelschnitts andeutet, giebt unter Berücksichtigung, dass der senkrechte Abstand des Brennpunkts von seiner Leitlinie $B_1L_1 = \frac{r}{e}$ und also der kleinste Werth von B_1Q' für die Ellipse grösser, die Parabel gleich und die Hyperbel kleiner als r ist, ein klares Bild von der Gestalt der Kegelschnitte. Die folgenden Figuren stellen, soweit es möglich ist, mit den circularen und parabolischen Diametrallinien und den elliptischen Brennpunkten

und Leitlinien eine Ellipse, eine Parabel und eine Hyperbel dar.



Von den mancherlei Sätzen, die in der obigen Formel enthalten sind, erwähnen wir nur denjenigen, der sich sofort ergiebt, wenn man sie in der Form

$$\frac{1}{B_1P'} = \pm \frac{1}{r} + \frac{1}{B_1Q'}$$

schreibt; er lautet: **Das harmonische Mittel zwischen den (absoluten) Entfernungen eines Brennpunkts von den auf einer seiner Graden liegenden Punkten des Kegelschnitts ist constant gleich r.**

Dazu bemerken wir endlich noch, dass, wenn der von B_1L_1 nach B_1P' gerechnete Winkel L_1B_1P' durch α' und der sogenannte Radiusvactor B_1P', absolut genommen, durch ϱ' bezeichnet wird,

$$\varrho' = \pm B_1P', \cos \alpha' = \pm \frac{B_1L_1}{B_1Q'} \text{ und also } \frac{r}{B_1Q'} = \pm e \cos \alpha'$$

ist und demgemäss die Relation

$$\varrho' = \frac{r}{1 + e\cos\alpha'}$$

statt hat.

35. Die einem Punkte des Kegelschnitts zugehörige Grade des Kegelschnitts und die durch ihn gehende Normallinie sind nach dem 25. Abschnitte harmonisch conjugirt in Bezug auf seine Verbindungslinien mit den Brennpunkten einer Hauptdiametrallinie, und folglich sind die auf dieser liegenden Punkte jener Graden harmonisch conjugirt in Bezug auf die Brennpunkte — bei der Parabel liegen sie daher von ihnen gleich weit ab, so dass mit Rücksicht auf einen Satz des vorigen Abschnitts der Satz besteht: Jeder Punkt der Parabel und die auf der Hauptdiametrallinie liegenden Punkte der durch ihn gehenden Normallinie und Graden des Kegelschnitts liegen vom Brennpunkt gleich weit ab — und es ist demnach, wenn sie, je nachdem sie auf der ersten oder zweiten Hauptdiametrallinie liegen, durch T', N' oder $\overline{T}'$, $\overline{N}'$ bezeichnet werden,

$$MN' . MT' = c^2, \quad M\overline{N}' . M\overline{T}' = \bar{c}^2.$$

Diese Gleichungen führen auf einige bemerkenswerthe Sätze.

Es sei B'_1 der Fusspunkt der zu einer Graden des Kegelschnitts senkrechten Graden des Brennpunkts B_1; es ist dann

$$\frac{B_1B'_1}{N'P'} = \frac{B_1T'}{N'T'}$$

und demnach, weil

$$\begin{aligned} N'T' . MT' &= - MN' . MT' + \overline{MT'}^2 = - \overline{MB}_1^2 + \overline{MT'}^2 \\ &= B_1T' (MB_1 + MT') \end{aligned}$$

ist,

$$B_1B'_1 = \frac{N'P'}{1 + \frac{MB_1}{MT'}}.$$

Daraus folgt zunächst, wenn B'_2 die analoge Bedeutung hat, wegen $MB_2 = - MB_1$ die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{B_1B'_1}, + \frac{1}{B_2B'_2}\right) = \frac{1}{N'P'}$$

und damit der Satz: Das harmonische Mittel zwischen den senkrechten Abständen der Brennpunkte einer Hauptdiametrallinie von einer Graden des Kegel-

schnitts ist gleich der zu ihr gehörigen Normale. In der Parabel ist daher der senkrechte Abstand des Brennpunkts von einer Graden derselben gleich der halben ihr zugehörigen Normale. Und weiter ergiebt sich

$$B_1B'_1 \,.\, B_2B'_2 = \frac{n'^2}{1-\frac{c^2}{y'^2}} = \frac{b^2n'^2}{b^2-e^2x'^2} = \frac{b^2n'^2}{\alpha'^2} = ab^2$$

oder also

$$B_1B'_1 \,.\, B_2B'_2 = \bar{b}^2;$$

das Product der senkrechten Abstände der Brennpunkte der ersten Hauptdiametrallinie von einer Graden des Kegelschnitts ist somit constant $\bar{b}^2$.

Ferner findet in den obigen Gleichungen ihre Begründung die Gleichung

$$\left(\frac{\overline{N'M}+\overline{MT'}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\overline{N'M}+\overline{MT'}}{2}-\overline{MT'}\right)^2 + c^2,$$

die den folgenden Satz enthält: Die Brennpunkte der ersten Hauptdiametrallinie und die auf der zweiten Hauptdiametrallinie liegenden Punkte der durch einen Punkt des Kegelschnitts gehenden Normallinie und Graden des Kegelschnitts liegen auf einem Kreise, dessen Centrum auf der zweiten Hauptdiametrallinie liegt.

36. Sind die auf einer Graden des Kegelschnitts liegenden Punkte zweier polar conjugirter Diametrallinien die Punkte P'_1 und P''_1, so gehen durch den ihr zugehörigen Punkt P des Kegelschnitts die Polaren dieser Punkte, und es ist, da diese jenen Diametrallinien parallel sind, wenn die auf ihnen durch sie bestimmten Punkte durch R′ und R″ bezeichnet werden,

$$\frac{MR'}{MP'_1} = \frac{R''P''_1}{MP''_1} = \frac{R''M+MP''_1}{MP''_1}$$

oder

$$\frac{MR'}{MP'_1} + \frac{MR''}{MP''_1} = 1.$$

Da nun ein Punkt einer Diametrallinie und der durch seine Polare auf ihr bestimmte Punkt als in Bezug auf den Kegel-

schnitt polar conjugirt in Bezug auf die auf ihr liegenden Punkte des Kegelschnitts harmonisch conjugirt sind — im Falle der Parabel liegen sie somit von diesen gleich weit ab —, so ist

$$MP'_1 . MR' = \alpha''^2, \quad MP''_1 . MR'' = \alpha'^2$$

und also

$$\frac{\overline{MR'}^2}{\alpha''^2} + \frac{\overline{MR''}^2}{\alpha'^2} = 1;$$

es besteht demnach, da durch $\overline{MR'}^2$ und $\overline{MR''}^2$ die quadratischen Parallelabstände des Punktes P von und in Bezug auf die polar conjugirten Diametrallinien — wir bezeichnen sie durch x''^2 und x'^2 — gegeben sind, der Satz: Zwischen den Parallelabständen eines Punktes des Kegelschnitts von und in Bezug auf zwei polar conjugirte Diametrallinien besteht die Relation

$$\frac{x'^2}{\alpha'^2} + \frac{x''^2}{\alpha''^2} = 1.$$

Der Parallelabstand des Punktes P von der durch den Punkt P′ des Kegelschnitts gehenden Graden desselben in Bezug auf die durch ihn gehende Diametrallinie ist

$$P'R' = P'M + MR'$$

und daher

$$\overline{MR'}^2 = \overline{P'M}^2 - 2P'M . P'R' + \overline{P'R'}^2$$

oder, wenn wir

$$P'R' = \acute{x}$$

setzen,

$$x''^2 = \alpha''^2 - 2\alpha''\acute{x} + \acute{x}^2;$$

demzufolge ist

$$x'^2 = 2\frac{\alpha'^2}{\alpha''}\acute{x} - \frac{\alpha'^2}{\alpha''^2}\acute{x}^2,$$

und es gilt, wenn die abkürzenden Bezeichnungen

$$p' = \frac{\alpha'^2}{\alpha''}, \quad q' = -\frac{\alpha'^2}{\alpha''^2}$$

eingeführt werden, der Satz: Zwischen den Parallelabständen eines Punktes des Kegelschnitts von einer Graden desselben und der durch den ihr zugehörigen Punkt des Kegelschnitts gehenden Diametrallinie besteht die Relation

$$x'^2 = 2p'\acute{x} + q'\acute{x}^2.$$

Die Grösse q' ist für jede reelle Diametrallinie der Ellipse negativ und der Hyperbel positiv und für die Parabel Null, denn es ist

$$q' = -\frac{\alpha'^2}{\alpha''^2} = \frac{\varDelta \mathbf{S}_{\alpha'}}{\varDelta\varDelta \mathbf{R}_{\alpha'} + \varDelta \mathbf{S}_{\alpha'}}.$$

Die Grösse p' wird **der halbe Parameter der Diametrallinie** genannt, sie ist durch die Gleichung

$$p'^2 = \frac{\alpha'^4}{\alpha''^2} = \frac{\varDelta^2 \mathbf{S}^2_{\alpha'}}{\mathbf{R}_{\alpha'}(\varDelta\varDelta \mathbf{R}_{\alpha'} + \varDelta \mathbf{S}_{\alpha'})}$$

bestimmt. Für die Parabel ist demnach

$$p'^2 = \frac{\varDelta \mathbf{S}^2_{\alpha'}}{\varDelta \mathbf{R}^2_{\alpha'}} \text{ oder also } p'^2 = 4\overline{B_1 P'}^2,$$

d. h. **der Parameter einer Diametrallinie gleich der vierfachen Entfernung des auf ihr liegenden Punktes derselben vom Brennpunkte. Für den hyperbolischen und elliptischen Kreis ist der Parameter einer Diametrallinie gleich ihrer Länge. Der Parameter der ersten Hauptdiametrallinie ist der (erste) Parameter des Kegelschnitts.**

Endlich sei noch bemerkt, dass für

$$(\alpha'' - x')^2 = \alpha''^2 - \alpha'^2 \qquad x'^2 = p'^2$$

und darnach **der Parameter einer Diametrallinie die Entfernung derjenigen Punkte des Kegelschnitts ist, welche auf einer der, durch die auf ihr in der quadratischen Entfernung $\alpha''^2 - \alpha'^2$ vom Centrum ab liegenden Punkte hindurchgehenden, der ihr polar conjugirten Diametrallinie parallelen Graden liegen.**

37. Die Diametrallinien, für deren polar conjugirte die Grösse α'^2 das Quadrat der halben Länge ist, oder deren auf dem Kegelschnitt liegende Punkte durch die Gleichung

$$\alpha'^2 = -\frac{\varDelta^2 \mathbf{S}_{\alpha'}}{\varDelta \mathbf{R}_{\alpha'}}$$

gegeben sind, sind eben wegen dieser Gleichung und als durch den Durchschnittspunkt der harmonischen Hauptdiametrallinien

$\Delta^3\mathbf{R} - \Delta S = 0$ und der Polaren der imaginären Kreispunkte $\mathbf{S} = 0$ gehend durch die Gleichung

$$\alpha'^2 \Delta (\Delta^3\mathbf{R} - \Delta S) + \Delta^5 \mathbf{S} = 0$$

dargestellt.

Die senkrechten Quadratabstände eines Punktes $\Sigma' = 0$ einer der Diametrallinien, deren quadratische halbe Länge die Grösse α''^2 ist, von den Hauptdiametrallinien sind daher durch die Gleichungen

$$x'^{\cdot 2} = \frac{\alpha'^2 - b^2}{e^2\alpha'^2} \cdot \frac{\Delta^2\mathbf{S}_{\dot\alpha}}{\Delta\mathbf{R}_{\dot\alpha}}, \quad \dot{x}^{\cdot 2} = \frac{\alpha'^2 - \bar{b}^2}{\bar{e}^2\alpha'^2} \cdot \frac{\Delta^2\mathbf{S}_{\dot\alpha}}{\Delta\mathbf{R}_{\dot\alpha}}$$

gegeben, und demnach ist seine quadratische Entfernung vom Centrum

$$\dot\alpha^2 = -\frac{\alpha''^2}{\alpha'^2} \cdot \frac{\Delta^2\mathbf{S}_{\dot\alpha}}{\Delta\mathbf{R}_{\dot\alpha}}$$

und in Folge dessen der senkrechte Abstand des Centrums von seiner Polare, mit sich selbst multiplicirt,

$$\dot{m}'^2 = \frac{b^2\bar{b}^2\alpha''^2}{\dot\alpha^2\alpha'^2}$$

und also durch die Gleichung

$$\dot\alpha^2 \dot{m}'^2 = \alpha''^2 m'^2$$

gegeben. Diese letztere Gleichung enthält den Satz: Das Product aus der Entfernung des Centrums von einem jeden Punkte einer Diametrallinie und seinem senkrechten Abstande von dessen Polare ist constant oder in andern Worten, da die Polare eines Punktes einer Diametrallinie als durch deren Pol gehend der ihr polar conjugirten Diametrallinie parallel ist, den Satz: Das Product der Entfernungen des Centrums von einem jeden Punkte einer Diametrallinie und dem durch seine Polare auf der zu der ihr polar conjugirten senkrechten Diametrallinie bestimmten Punkte ist constant. Im Falle des elliptischen Kreises nimmt er die einfachere Form an: Das Product der Entfernungen des Centrums von einem Punkte einer Diametrallinie und dem auf ihr durch seine Polare bestimmten Punkte ist constant.

Im Anschluss hieran sei bemerkt, dass die Summe der

reciproken quadratischen halben Längen zweier zu einander senkrechter Diametrallinien constant ist; denn es ist, wenn wir deren quadratische halbe Längen durch α''^2 und α''^2_1 bezeichnen, wegen $\sin^2(90+\varphi') = 1 - \sin^2\varphi'$

$$\frac{\alpha''^2_1 - b^2}{\bar{e}^2\alpha''^2_1} = 1 - \frac{\alpha''^2 - b^2}{\bar{e}^2\alpha''^2}$$

oder also wegen $\bar{e}^2 + {}^{-2} = 2$ und $\mathfrak{c}^2 = \bar{\mathfrak{e}}^2\bar{b}^2$ in der That

$$\frac{1}{\alpha''^2} + \frac{1}{\alpha''^2_1} = \frac{\mathfrak{c}^2}{b^2\bar{b}^2}.$$

Für die harmonischen Hauptdiametrallinien ist übrigens

$$\alpha'^2 = + \frac{\Delta^2\mathfrak{S}_{\alpha'}}{\Delta\mathfrak{R}_{\alpha'}}$$

$$e^2 x'^2 = \alpha'^2,\quad \bar{e}^2\acute{x}'^2, = \alpha'^2,\quad \alpha'^2 m'^2 = - b^2\bar{b}^2,$$

für die anharmonischen Hauptdiametrallinien dagegen

$$\alpha'^2 = - \frac{\Delta^2\mathfrak{S}_{\alpha'}}{\Delta\mathfrak{R}_{\alpha'}}$$

$$\mathfrak{e}^2 x'^2 = \alpha'^2,\quad \bar{\mathfrak{e}}^2\acute{x}'^2 = \alpha'^2,\quad \alpha'^2 m'^2 = + b^2\bar{b}^2.$$

38. Die der Gleichung

$$\alpha'^2\Delta(\Delta^3\mathfrak{R} - \Delta S) + \Delta^5\mathfrak{S} = 0$$

zugeordnete Gleichung ist

$$(b^2\bar{b}^2 - \alpha'^2\alpha''^2)\,\Delta^3\Delta^4\boldsymbol{P} = 0;$$

denn, wenn wir sie in der Form $\varkappa\boldsymbol{P} = 0$ geben, so erweist sich die Constante $\varkappa$, da die der Gleichung $\Delta^3\mathfrak{R} - \Delta S = 0$ zugeordnete Gleichung nach dem 13. Abschnitte von der Form $\Delta^2\Delta\Sigma + 2\Delta\Delta^3\Phi' = 0$ oder, weil hierin wegen $3\Theta' = \Delta$ $2\Delta^2\Phi' = \Delta^3\boldsymbol{P} - \Delta\Sigma$ ist, von der Form $\Delta\Delta^4\boldsymbol{P} = 0$ ist, durch die Bemerkung, dass jene Gleichung für $\alpha'^2 = b^2$ und $\alpha'^2 = \bar{b}^2$ die Hauptdiametrallinien und für $\alpha'^2 = \infty$ die harmonischen Hauptdiametrallinien darstellt und daher die zugeordnete Gleichung in den beiden ersten Fällen die Form $0 = 0$ annehmen und im dritten den Factor $\Delta^3\Delta^4\alpha'^4$ eingehen muss, als von der Form $(b^2 - \alpha'^2)(\bar{b}^2 - \alpha'^2)\,\Delta^3\Delta^4$.

Das Product der senkrechten Quadratabstände eines Punktes von den Diametrallinien, deren quadratische halbe Länge die Grösse α'^2 ist, ist demnach nach der Formel 15. des 8. Abschnitts durch die Gleichung

$$\mathbf{R}_\alpha^2 \{(-\alpha'^2 A^2 \varDelta + \Delta^3 (\varDelta^2 + 8J^2 \varDelta))^2 + 16J^2 \varDelta^5 (b^2\bar{b}^2 - \alpha'^2\alpha''^2)\} \mu^2\mu'^2 =$$
$$16J^4 (\alpha'^2 \varDelta (\Delta^3 \mathbf{R}_\alpha - \varDelta S_\alpha) + \Delta^5 \mathbf{S}_\alpha)^2$$

oder nach gehöriger Reduction durch die Gleichung

$$A^2 \varDelta^4 \mathbf{R}_\alpha^2 \alpha''^4 \mu^2 \mu'^2 = 16J^4 (\alpha'^2 \varDelta (\Delta^3 \mathbf{R}_\alpha - \varDelta \mathrm{S}_\alpha) + \Delta^5 \mathbf{S}_\alpha)^2$$

gegeben.

Für die harmonischen Hauptdiametrallinien ist hiernach

$$A^2 \varDelta^2 \mathbf{R}_\alpha^2 \mu^2 \mu'^2 = 16J^4 (\Delta^3 \mathbf{R}_\alpha - \varDelta S_\alpha)^2$$

und für die anharmonischen Hauptdiametrallinien

$$A^2 A^2 \varDelta^2 \mathbf{R}_\alpha^2 \mu^2 \mu'^2 = 16J^4 (\varDelta (\Delta^3 \mathbf{R}_\alpha - \varDelta S_\alpha) + 2A\Delta^2 \mathbf{S}_\alpha)^2;$$

es geht daraus hervor, dass jeder Punkt der Kegelschnitte

$$S = 0,\ 2\Delta^3 \mathbf{R} - \varDelta S = 0$$

und jeder Punkt der Kegelschnitte

$$\varDelta (\Delta^3 \mathbf{R} - \varDelta S) + 2A\Delta^2 \mathbf{S} - A\Delta^3 \mathbf{R} = 0$$
$$\varDelta (\Delta^3 \mathbf{R} - \varDelta S) + 2A\Delta^2 \mathbf{S} + A\Delta^3 \mathbf{R} = 0,$$

und nur ein solcher, die Eigenschaft hat, dass das Product seiner senkrechten Quadratabstände beziehungsweise von den harmonischen und anharmonischen Hauptdiametrallinien constant gleich

$$\frac{b^4\bar{b}^4}{c^4} \text{ und } \frac{b^4\bar{b}^4}{\mathbf{c}^4}$$

ist.

Für diese Kegelschnitte gelten, wie man aus den Formeln am Ende des 29. Abschnitts für $\beta'^2 = 0$ und $\beta'^2 = 2$ erkennt, die Relationen

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{\acute{x}^2}{\bar{b}^2} = +1,\ \frac{x'^2}{b^2} + \frac{\acute{x}^2}{\bar{b}^2} = -1$$
$$\frac{x'^2}{b^2} - \frac{\acute{x}^2}{\bar{b}^2} = +1,\ \frac{x'^2}{b^2} - \frac{\acute{x}^2}{\bar{b}^2} = -1,$$

welche, in der Form

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{\acute{x}^2}{\bar{b}^2} = 1,\ \frac{\acute{x}^2}{-\bar{b}^2} + \frac{x'^2}{-b^2} = 1$$
$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{\acute{x}^2}{-\bar{b}^2} = 1,\ \frac{\acute{x}^2}{\bar{b}^2} + \frac{x'^2}{-b^2} = 1$$

geschrieben, vollständigen Aufschluss über sie geben.

Alle vier Kegelschnitte haben dieselben Hauptdiametrallinien; die Hauptdiametrallinie, die für den ersten Kegelschnitt die erste oder die zweite ist, ist für den zweiten die zweite oder die erste, für den dritten die erste oder die zweite und für den vierten die zweite oder die erste Hauptdiametrallinie. Die harmonischen und anharmonischen Hauptdiametrallinien des ersten Kegelschnitts sind beziehungsweise die harmonischen und anharmonischen des zweiten und die anharmonischen und harmonischen des dritten und vierten. Jede Diametrallinie hat, je nachdem sie mit dem ersten Kegelschnitte reelle oder imaginäre Punkte gemein hat, mit dem zweiten Kegelschnitt imaginäre oder reelle Punkte gemein, und zwar ist ihre halbe Länge, wenn sie in Bezug auf den ersten Kegelschnitt durch α' oder $i\alpha'$ dargestellt ist, in Bezug auf den zweiten die Grösse $i\alpha'$ oder α'; und dasselbe gilt vom dritten und vierten Kegelschnitt. Ist der erste Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, so ist der zweite gleichfalls eine Ellipse oder Hyperbel, der dritte aber und vierte eine Hyperbel oder Ellipse. Endlich bemerken wir als die Beschaffenheit und Lage der Scheitelpunkte und Brennpunkte beleuchtend, dass das, was für den ersten Kegelschnitt

$$b^2, \quad \bar{b}^2, \; c^2, \quad \mathbf{c}^2$$

ist, für den zweiten

$$-\bar{b}^2, \; -b^2, \; c^2, \; -\mathbf{c}^2,$$

für den dritten

$$b^2, \; -\bar{b}^2, \; \mathbf{c}^2, \quad c^2$$

und für den vierten

$$\bar{b}^2, \; -b^2, \; \mathbf{c}^2, \; -c^2$$

ist.

39. Das sechszehnfache Product der quadratischen Parallelabstände eines jeden Punktes des Kegelschnitts von den harmonischen Hauptdiametrallinien ist mit Rücksicht auf den vorigen Abschnitt, der Winkel φ durch die Gleichung $\mathrm{tg}^2\,\varphi = a$ vorausgesetzt, die Grösse $\frac{16 b^4 \bar{b}^4}{c^4 \sin^4 2\varphi}$ oder, da $\sin^2\varphi = \frac{a}{e^2}$, $\cos^2\varphi = \frac{1}{e^2}$ und also $\sin^2 2\varphi = \frac{4a}{e^4} = -\frac{4b^2\bar{b}^2}{c^4}$ ist, die Grösse c^4. Da der auf

einer Graden des Kegelschnitts liegende Punkt desselben nach dem 7. Abschnitte von den auf ihr liegenden Punkten der harmonischen Hauptdiametrallinien gleich weit abliegt, so ist deren Entfernung vom Centrum das Doppelte der Entfernung der durch die ihnen parallelen Graden jenes Punktes auf ihnen bestimmten Punkte vom Centrum und es ist demnach auch das Product der quadratischen Entfernungen der auf einer Graden des Kegelschnitts liegenden Punkte der harmonischen Hauptdiametrallinien vom Centrum constant c^4; demgemäss bestimmt jede Grade des Kegelschnitts mit den harmonischen Hauptdiametrallinien ein Dreieck, dessen Quadratinhalt constant $-b^2\bar{b}^2$ ist, denn es ist $\frac{c^4 \sin^2 2\varphi}{4} = -b^2\bar{b}^2$.

Der quadratische Parallelabstand eines der Scheitelpunkte der ersten Hauptdiametrallinie von den harmonischen Hauptdiametrallinien ist $\frac{b^2 \sin^2 \varphi}{\sin^2 2\varphi} = \frac{c^2}{4}$. Wir bezeichnen deshalb diesen Punkt durch S und die Punkte, die auf den durch ihn gehenden den harmonischen Hauptdiametrallinien parallelen Graden durch diese und die ihnen parallelen Graden eines Punktes des Kegelschnitts bestimmt werden, beziehungsweise durch H_1, H_2 und P_1, P_2 und setzen

$$SH_1 = SH_2 = \frac{c}{2},\ SP_1 = x_1,\ SP_2 = x_2;$$

es ist dann

$$P_1H_1 = \frac{c}{2} - x_1,\ P_2H_2 = \frac{c}{2} - x_2,$$

also

$$P_1H_1 \,.\, P_2H_2 - \frac{c^2}{4} = x_1x_2 - \frac{c}{2}(x_1 + x_2)$$

und folglich, da offenbar $P_1H_1 \,.\, P_2H_2$ stets positiv ist, nach dem ersten Satze dieses Abschnitts

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{c}.$$

Jeder Kegelschnitt, für den $c^2 = 4$ ist, steht darnach wegen der Gleichungen $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{\bar{e}^2} = 1$ und $\frac{1}{\mathbf{e}^2} + \frac{1}{\bar{\mathbf{e}}^2} = 1$ zu den Excentricitäten der Kegelschnitte in einer merkwürdigen Beziehung.

Viertes Kapitel.

Von den Invarianten der Kegelschnitte und den einfachen Formen der Kegelschnittsgleichung. Das Doppelverhältniss. Ableitung und Verallgemeinerung von Sätzen vermittelst der Prinzipien der Polarreciprocität, Dualität und Continuität.

---

40. Die Gleichung

$$\frac{c^2}{\mathbf{c}^2} = \frac{\mathbf{A}}{\mathit{A}}$$

kennzeichnet das Verhältniss $\frac{\mathbf{A}}{\mathit{A}}$ als ein constantes, von der Wahl des Fundamentaldreiecks unabhängiges. Es ist also, wenn wir den Kegelschnitt $S = 0$ in Bezug auf ein anderes Fundamentaldreieck durch die Gleichung $\dot{S} = 0$ gegeben denken,

$\frac{\mathbf{A}}{\mathit{A}} = \frac{\dot{\mathbf{A}}}{\dot{\mathit{A}}}$ oder

$$\mathbf{A} = \nu \dot{\mathbf{A}}, \ \mathit{A} = \nu \dot{\mathit{A}}$$

und wegen der Gleichungen

$$16 J^2 \Lambda = \mathbf{A}^2 - \mathit{A}^2, \ 16 \dot{J}^2 \dot{\Lambda} = \dot{\mathbf{A}}^2 - \dot{\mathit{A}}^2, \ c^2 = \frac{\Delta^3 \mathbf{A}}{\Lambda^2} = \frac{\dot{\Delta}^3 \dot{\mathbf{A}}}{\dot{\Lambda}^2}$$

demzufolge

$$J^2 \Lambda = \nu^2 \dot{J}^2 \dot{\Lambda}, \ J^4 \Delta^3 = \nu^3 \dot{J}^4 \dot{\Delta}^3.$$

Daraus geht hervor, dass diese in Bezug auf zwei Fundamentaldreiecke gebildeten Coefficientenfunctionen sich von einander nur durch einen constanten von der Wahl der Fundamentaldreiecke abhängigen Factor unterscheiden; die Functionen Δ, Λ, A, $\mathbf{A}$ sind, wie man sagt, Invarianten. Die Bestimmung des constanten Factors liefert die die Werthe von $\varkappa$, $\varkappa'$ angebende Gleichung, für welche der Kegelschnitt $\varkappa \Sigma + \varkappa' \boldsymbol{\Sigma} = 0$ in Punkte degenerirt, nämlich die Gleichung $\Delta^3 \varkappa^3 + 3\Theta' \varkappa^2 \varkappa' + 3\Theta \varkappa \varkappa'^2 = 0$, in der $3\Theta' = \Delta \mathit{A}$, $3\Theta \Delta = -4J^2 \Lambda$ ist. Nach dem 19. Abschnitte des ersten Theiles vollzieht sich nämlich die Coordinatentransformation durch lineare Substitution, durch welche die Gleichung $\varkappa \Sigma + \varkappa' \boldsymbol{\Sigma} = 0$

in die Gleichung $\varkappa\dot{\Sigma} + \varkappa'\dot{\Sigma} = 0$ übergeht, ohne dass dadurch die Grössen $\varkappa$, $\varkappa'$ sich ändern; die Grössen $\varkappa$, $\varkappa'$, für welche sie Punkte darstellt, bleiben demnach für jedes Fundamentaldreieck dieselben, und es müssen daher, wenn unter den Coefficienten der sie bestimmenden Gleichung sich einer durch Hinzutreten eines Factors ändert, die übrigen denselben Factor eingehen, also, weil $J^4 \Delta^3 = \nu^3 \dot{J}^4 \dot{\Delta}^4$ ist, auch z. B. $J^4 \boldsymbol{\Theta}' = \nu^3 \dot{J}^4 \dot{\boldsymbol{\Theta}}'$ sein. Und da nun $J^{\frac{4}{3}} \Delta \mathcal{A} = \nu^2 \dot{J}^{\frac{4}{3}} \dot{\Delta} \dot{\mathcal{A}}$ und also andererseits $J^{\frac{4}{3}} \boldsymbol{\Theta}' = \nu^2 \dot{J}^{\frac{4}{3}} \dot{\boldsymbol{\Theta}}'$ ist, so ergiebt sich der constante Factor durch die Gleichung

$$J^{\frac{8}{3}} = \nu \dot{J}^{\frac{8}{3}};$$

es ist demnach

$$\dot{J}^{\frac{8}{3}} \mathcal{A} = J^{\frac{8}{3}} \dot{\mathcal{A}},\ \dot{J}^{\frac{8}{3}} A = J^{\frac{8}{3}} \dot{A},\ \dot{J}^{\frac{10}{3}} \mathfrak{A} = J^{\frac{10}{3}} \dot{\mathfrak{A}},\ \dot{J}^4 \Delta^3 = J^4 \dot{\Delta}^3.$$

Zugleich leuchtet ein und wird in gleicher Weise aus der Gleichung $\Delta^3\varkappa^3 + 3\boldsymbol{\Theta}'\varkappa^2\varkappa' + 3\boldsymbol{\Theta}\varkappa\varkappa'^2 + \Delta'^3\varkappa'^3 = 0$ gefunden, dass überhaupt ganz allgemein die Functionen

$$\boldsymbol{\Theta},\ \boldsymbol{\Theta}',\ \Theta,\ \Theta'$$

auch Invarianten sind, und dass die in Bezug auf zwei Fundamentaldreiecke gebildeten genannten Functionen ebenso, wie die kubischen Discriminanten zu einander sämmtlich in dem Verhältniss der biquadratischen Fundamentalflächeninhalte stehen.

Wir nennen den Potenzexponenten des Verhältnisses der Fundamentalflächeninhalte $J : \dot{J}$ in dem Sinne, wie er hier erscheint, den Invariantenexponenten der betreffenden Function, so dass darnach z. B. 4 der Invariantenexponent der letztgenannten Functionen ist. Der Invariantenexponent des Fundamentalflächeninhalts ist Eins, der einer von der Wahl des Fundamentaldreiecks unabhängigen Grösse Null.

Nach den Coordinatentransformationsformeln — wir setzen die Coordinatentransformation in der am Schlusse des 19. Abschnitts des ersten Theiles bezeichneten Weise ohne jede einschränkende Relation voraus — geht offenbar die Function $\mathbf{R}$ in die Function $\dot{\mathbf{R}}$ über; sie ist daher auch eine Invariante und zwar ist ihr Invariantenexponent Null. In derselben Weise sind überhaupt alle Functionen, die der Null gleichgesetzt geometrische Gebilde repräsentiren, Invarianten,

weil die Gleichungen dieser Gebilde durch Umformung für ein anderes Fundamentaldreieck in ihrer Form offenbar im Wesentlichen keine Aenderung erleiden können. So besitzt auch die Function $\Delta^3\mathbf{R} - \Delta S$ den Invariantencharacter und zwar muss ihr Invariantenexponent 4 sein. Daraus folgt, dass $\frac{2}{3}$ der Invariantenexponent der Function S und zugleich auch, da die dieses ausdrückende Gleichung $\dot{J}^{\frac{2}{3}}S = J^{\frac{2}{3}}\dot{S}$, weil $\Delta^2 S$ durch die Substitutionsgleichungen 6. in $\Delta^2\Sigma$ und ebenso $\dot{\Delta}^2\dot{S}$ durch die ihnen entsprechenden in $\dot{\Delta}^2\dot{\Sigma}$ übergeht, die Gleichung $\dot{J}^{\frac{2}{3}}\Sigma = J^{\frac{2}{3}}\dot{\Sigma}$ nach sich zieht, der Invariantenexponent der Function Σ ist. Der Invariantenexponent der Functionen $\mathbf{\Sigma}$ und $\mathbf{S}$ oder, sagen wir, der imaginären Kreispunkte und ihrer Polaren ist ebenfalls $\frac{2}{3}$.

Nach den Gleichungen $3\Theta S + 3\Theta' S' + 2\Delta\Delta' F' = 0$ und $3\Theta\Sigma + 3\Theta'\Sigma' + 2\Delta\Delta'\Phi' = 0$ ist ferner der Invariantenexponent der Functionen F' und Φ' 2. Eigentlich ist die Bezeichnung dieser Zahl als Invariantenexponent nicht ganz correct; denn dieser ist doch offenbar der Potenzexponent des Verhältnisses, in dem eine Coordinatenfunction zu der aus ihr durch die Coordinatentransformationsformeln entstehenden oder in dem eine aus den Coefficienten der ersteren gebildete Coefficientenfunction zu der aus den Coefficienten der letzteren gleichgebildeten Function steht, jene Zahl aber bezeichnet den Potenzexponenten des Verhältnisses, in dem die in Bezug auf die Functionen Σ und Σ' oder S und S′ gebildeten Functionen F' und Φ' zu den in Bezug auf die durch Coordinatentransformation aus jenen entstehenden Functionen $\dot{\Sigma}$ und $\dot{\Sigma}'$ oder $\dot{S}$ und $\dot{S}'$ gleich gebildeten, nicht zu den aus ihnen durch die Coordinatentransformationsformeln hervorgehenden Functionen stehen. Man könnte deshalb, weil solche Functionen, die zu gegebenen in einer von der Wahl des Fundamentaldreiecks unabhängigen Beziehung stehen, sofern sie selbst Coordinatenfunctionen sind, zum Unterschiede von den Coefficientenfunctionen, die man insbesondere als Invarianten bezeichnet, Covarianten nennt, jene Zahl als Covariantenexponenten bezeichnen, doch abstrahiren wir von dieser Bezeichnung der Gleichförmigkeit wegen zu Gunsten der gewählten allgemeineren und bezeichnenderen und unterscheiden nur, wenn nöthig, In-

variantenexponenten im engeren und im weiteren Sinne. Der Invariantenexponent der Functionen F′ und Φ' im engeren Sinne ist, weil sie Null gleich gesetzt Kegelschnitte repräsentiren, im Allgemeinen $\frac{2}{3}$; auch wird der Invariantenexponent z. B. der Discriminante dieser Functionen im engeren mit dem im weiteren Sinne nicht übereinstimmen.

Die Eigenschaft der bis auf einen bekannten Factor vollständigen Unveränderlichkeit der Functionen ist von gewichtiger Bedeutung; nach ihr sind nämlich auch Invariantenausdrücke und -gleichungen, auf die man bei einer speciellen, dem jedesmaligen Zwecke am meisten entsprechenden Lage des Fundamentaldreiecks, in Folge deren die Gleichungen eine einfachere und kürzere Form annehmen, kommt, als für jedes Fundamentaldreieck, als allgemein gültig anzusehen, vorausgesetzt, dass für sie die Zählung der Invariantenexponenten der einzelnen Grössen eines jeden Gliedes eine constante Summe ergiebt, weil dann ihre Form durch eine Umformung für ein anderes Fundamentaldreieck keine Aenderung erleiden kann; im andern Falle werden sie allgemein gültig erst durch eine solche Umformung. Beispiele dazu werden sich in den folgenden Abschnitten, in denen die Kegelschnitte unter Annahme solcher speciellen Lagen des Fundamentaldreiecks zur Entwickelung von Sätzen betrachtet werden, darbieten.

41. Wenn ein in Bezug auf den Kegelschnitt sich selbst polar conjugirtes Dreieck als Fundamentaldreieck angenommen wird, so müssen nach dem 9. Abschnitt in der Gleichung des Kegelschnitts die Coefficienten a_{23}, a_{31}, a_{12} und α_{23}, α_{31}, α_{12} Null sein, und der Kegelschnitt ist durch die Gleichungen

$$a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 = 0, \quad \alpha_{11}a_1^2 + \alpha_{22}a_2^2 + \alpha_{33}a_3^2 = 0$$

dargestellt.

Das Centrum des Kegelschnitts ist

$$(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}) \text{ oder } (a_{22}a_{33}, a_{33}a_{11}, a_{11}a_{22});$$

seine senkrechten Abstände von den Seitenlinien des Dreiecks sind daher durch $\frac{2J\alpha_{11}}{s_1(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})}$ oder $\frac{2J\Delta^3}{\Delta s_1 a_{11}}$, u. s. f. gegeben; es folgt daraus wegen $b^2\bar{b}^2 = -\frac{4J^2\Delta^6}{\Delta^3}$ zunächst der

Satz: Die Summe der reciproken senkrechten Abstände des Centrums des Kegelschnitts von den Seitenlinien eines in Bezug auf ihn sich selbst polar conjugirten Dreiecks, multiplicirt mit der quadratischen halben Länge der inneren Winkelhalbirungsdiametrallinien d. i. mit $\frac{2\mathfrak{b}^2\bar{\mathfrak{b}}^2}{\mathfrak{c}^2}$, ist gleich dem negativen vierfachen Inhalte des Dreiecks, und das Product jener senkrechten Abstände, multiplicirt mit dem doppelten Radius des dem Dreieck umschriebenen Kreises, gleich $\mathfrak{b}^2\bar{\mathfrak{b}}^2$. Ferner ist die Potenz des Centrums des Kegelschnitts in Bezug auf den einem in Bezug auf ihn sich selbst polar conjugirten Dreieck umschriebenen Kreis gleich dem negativen quadratischen Radius des durch seine hyperbolischen Brennpunkte gehenden Kreises, denn sie ist

$$\frac{a_{11}a_{22}a_{33}(s_1^2a_{11} + s_2^2a_{22} + s_3^2a_{33})}{(a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22})^2} = -\frac{\Delta^3 A}{A^2} = -\mathfrak{c}^2.$$

Weil für den hyperbolischen Kreis $\mathfrak{c}^2 = 0$ ist, so liegt sein Centrum auf jenem Kreise; der einem jeden in Bezug auf den hyperbolischen Kreis sich selbst polar conjugirten Dreieck umschriebene Kreis geht also stets durch sein Centrum.

Die Centra der ein- und angeschriebenen Kreise eines jeden in Bezug auf den hyperbolischen Kreis sich selbst polar conjugirten Dreiecks liegen auf dem hyperbolischen Kreise, denn es ist $a_{11}s_1^2 + a_{22}s_2^2 + a_{33}s_3^2 = 0$ wegen $A = 0$.

Der (nicht unendlich ferne) elliptische Brennpunkt der Parabel ist, wenn diese auf ein sich selbst polar conjugirtes Dreieck bezogen ist, durch die Form

$$\left(A - \frac{\Delta^2 s_1^2}{\alpha_{11}},\ A - \frac{\Delta^2 s_2^2}{\alpha_{22}},\ A - \frac{\Delta^2 s_3^2}{\alpha_{33}}\right)$$

gegeben, die ihn als einen Punkt der Verbindungslinie des Schwerpunkts des Dreiecks und des Punktes $\left(\frac{s_1^2}{\alpha_{11}}, \frac{s_2^2}{\alpha_{22}}, \frac{s_3^2}{\alpha_{33}}\right)$ d. i. des auf dem umschriebenen Kreise liegenden, dem Centrum

in Bezug auf das Dreieck isogonal entsprechenden Punktes bezeichnet und zugleich, wenn diese Punkte durch B, S, U bezeichnet werden, auf Grund der Formel 9. des 8. Abschnitts des ersten Theiles wegen $\frac{s_1^2}{\alpha_{11}} + \frac{s_2^2}{\alpha_{22}} + \frac{s_3^2}{\alpha_{33}} = \frac{A}{\Delta^2}$ die Relation $3SB - UB = 0$ oder, da $BU = BS + SU$ ist, die Relation

$$2BS = SU$$

erkennen lässt; der Brennpunkt der Parabel liegt demnach auf dem Feuerbachschen Kreise eines jeden in Bezug auf sie sich selbst polar conjugirten Dreiecks. Die Polare des Brennpunkts ist

$$|\mathcal{A}a_{11} - s_1^2 a_{11}^2,\ \mathcal{A}a_{22} - s_2^2 a_{22}^2,\ \mathcal{A}a_{33} - s_3^2 a_{33}^2|$$

oder

$$|s_2^2\alpha_{33} + s_3^2\alpha_{22},\ s_3^2\alpha_{11} + s_1^2\alpha_{33},\ s_1^2\alpha_{22} + s_2^2\alpha_{11}|;$$

wegen $2J(\cot A_2 + \cot A_3) = s_1^2$, u. s. f. und $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0$ liegt daher auf ihr der Punkt $(s_1^2 \cot A_1, s_2^2 \cot A_2, s_3^2 \cot A_3)$, und es gilt der Satz: Das Centrum des einem jeden in Bezug auf eine Parabel sich selbst polar conjugirten Dreieck umschriebenen Kreises liegt auf der (nicht unendlich fernen) elliptischen Leitlinie derselben.

Durch jede zwei zu einander senkrechte Grade eines elliptischen Brennpunkts und dessen Leitlinie wird ein sich selbst polar conjugirtes Dreieck bestimmt. Nimmt man demgemäss einen Brennpunkt der ersten Hauptdiametrallinie als den Fundamentalpunkt (0, 0, 1) und zwei durch ihn gehende zu einander senkrechte Grade als die Fundamentallinien |1, 0, 0|, |0, 1, 0| an, so ist

$$(A + \mathcal{A})\,\alpha_{11} - 2\Delta^2 s_1^2 = 0,\ (A + \mathcal{A})\,\alpha_{22} - 2\Delta^2 s_2^2 = 0$$

oder

$$a_{22}a_{33} = -\frac{2\Delta^3 s_1^2}{A + \mathcal{A}},\ a_{33}a_{11} = -\frac{2\Delta^3 s_2^2}{A + \mathcal{A}}$$

und demzufolge

$$a_{33} = -\frac{4\Delta^3 s_1^2 s_2^2}{(A + \mathcal{A})^2} = -\frac{16J^2\Delta^3}{(A + \mathcal{A})^2}$$

oder

$$a_{33}^2 = \frac{2\Delta^3 r^2}{A + \mathcal{A}},$$

und die Gleichung des Kegelschnitts, bezogen auf ein durch einen Brennpunkt der ersten Hauptdiametrallinie und dessen Leitlinie bestimmtes sich selbst polar conjugirtes Dreieck, ist in Punktcoordinaten

$$s_2^2\alpha_1^2 + s_1^2\alpha_2^2 - r^2\alpha_3^2 = 0.$$

Da hiernach offenbar $\mathcal{A} = 8J^2 - s_3^2r^2$, $\mathcal{A} = s_3^2r^2 - 4J^2$, also $\mathbf{A}^2 = s_3^4r^4$ und somit wegen $\Delta^3 = 4J^2r^2$ in dem gegenwärtigen Falle

$$\mathbf{A} = s_3^2r^2,\ \mathcal{A} + \mathbf{A} = 8J^2$$

ist, so ist

$$4J^2e^2 = s_3^2r^2,$$

und die gegebene Gleichung ist demnach in der Form

$$\frac{\alpha_1^2}{s_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{s_2^2} - e^2 \cdot \frac{\alpha_3^2}{s_3^2} = 0$$

darstellbar und zeigt dadurch, dass die Summe der senkrechten Quadratabstände eines Punktes des Kegelschnitts von zwei zu einander senkrechten Graden eines Brennpunkts der ersten Hauptdiametrallinie gleich ist seinem mit e^2 multiplicirten senkrechten Quadratabstande von dessen Leitlinie.

Die Gleichung des elliptischen Kreises, bezogen auf ein in Bezug auf ihn sich selbst polar conjugirtes Dreieck, ist, weil aus den Gleichungen $a_{22} + a_{33} = \lambda s_1^2$, u. s. f. die Grössen a_{11}, a_{22}, a_{33} sich als den Grössen $\cot A_1$, $\cot A_2$, $\cot A_3$ proportional erweisen, in Punktcoordinaten

$$\cot A_1\alpha_1^2 + \cot A_2\alpha_2^2 + \cot A_3\alpha_3^2 = 0.$$

Der im 18. Abschnitte des ersten Theiles so benannte Kreis um den Höhenpunkt des Dreiecks ist demnach derjenige Kreis, in Bezug auf den das Dreieck ein sich selbst polar conjugirtes Dreieck ist; er wird deshalb der dem Dreieck polar conjugirte Kreis genannt.

42. Wenn man das Fundamentaldreieck so annimmt, dass z. B. der Fundamentalpunkt (1, 0, 0) ein Punkt des Kegelschnitts ist, so muss $a_{11} = 0$, oder dass z. B. die Fundamentallinie |1, 0, 0| eine Grade des Kegelschnitts ist, so muss $\alpha_{11} = 0$ sein. Darnach ist die Gleichung eines durch zwei Fundamentalpunkte (0, 1, 0), (0, 0, 1) gehenden Kegelschnitts

$$a_{11}\alpha_1^2 + 2a_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0$$

und die Gleichung eines an zwei Fundamentallinien $|0, 1, 0|$, $|0, 0, 1|$ liegenden Kegelschnitts

$$\alpha'_{11}a_1^2 + 2\alpha'_{23}a_2a_3 + 2\alpha'_{31}a_3a_1 + 2\alpha'_{12}a_1a_2 = 0.$$

Zwischen diesen Kegelschnitten besteht, da

$$\begin{aligned}3\varDelta'\Theta' &= a_{23}^2\alpha'^2_{23} + a_{31}^2\alpha'^2_{31} + a_{12}^2\alpha'^2_{12} \\ &\quad + 2(a_{31}a_{12} - a_{23}a_{11})(\alpha'_{31}\alpha'_{12} - \alpha'_{23}\alpha'_{11}) \\ &\quad + 2a_{12}a_{23}\alpha'_{12}\alpha'_{23} + 2a_{23}a_{31}\alpha'_{23}\alpha'_{31} \\ &= (a_{23}\alpha'_{23} + a_{31}\alpha'_{31} + a_{12}\alpha'_{12})^2 + a_{11}a_{23}(-2\alpha'_{31}\alpha'_{12} \\ &\quad + \alpha'_{11}\alpha'_{23}) + \alpha'_{11}\alpha'_{23}(-2a_{31}a_{12} + a_{11}a_{23})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}3\Theta &= \varDelta'(\alpha'_{11}a_{11} + 2\alpha'_{23}a_{23} + 2\alpha'_{31}a_{31} + 2\alpha'_{12}a_{12}), \\ \varDelta^3 &= -2a_{23}a_{31}a_{12} + a_{11}a_{23}^2, \\ \varDelta'^3 &= -2\alpha'_{23}\alpha'_{31}\alpha'_{12} + \alpha'_{11}\alpha'^2_{23}\end{aligned}$$

ist, die Relation

$$\begin{aligned}3\varDelta'\Theta' - \tfrac{1}{4}\left(\frac{3\Theta}{\varDelta'} - a_{11}\alpha'_{11}\right)^2 &= 3\varDelta\Theta - \tfrac{1}{4}\left(\frac{3\Theta'}{\varDelta} - a_{11}\alpha'_{11}\right)^2 \\ &= \frac{a_{11}a_{23}\varDelta'^3}{\alpha'_{23}} + \frac{\alpha'_{11}\alpha'_{23}\varDelta^3}{a_{23}}\end{aligned}$$

oder also, wenn wir

$$\varkappa a_{11} + \frac{\varkappa'\alpha'^2_{23}}{\varDelta'} = 0, \quad \frac{\lambda a_{23}^2}{\varDelta} + \lambda'\alpha'_{11} = 0$$

setzen und, was unter der Voraussetzung der Nichtdegeneration der Kegelschnitte stets angeht,

$$a_{23} = \frac{\varDelta}{\delta}, \quad \alpha'_{23} = \frac{\varDelta'}{\delta'},$$

wo δ, δ' die Discriminanten der Kegelschnitte sind, wenn sie in der Form

$$\begin{aligned}a_{11}\alpha_1^2 + 2\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 &= 0 \\ \alpha'_{11}a_1^2 + 2a_2a_3 + 2\alpha'_{31}a_3a_1 + 2\alpha'_{12}a_1a_2 &= 0\end{aligned}$$

vorausgesetzt sind, annehmen, die Relation

$$\begin{aligned}-3\varDelta'\Theta' + \tfrac{1}{4}\left(\frac{3\Theta}{\varDelta'} - \frac{\varDelta\varDelta'}{\delta\delta'}\cdot\frac{\varkappa'\lambda}{\varkappa\lambda'}\right)^2 &= -3\varDelta\Theta \\ + \tfrac{1}{4}\left(\frac{3\Theta'}{\varDelta} - \frac{\varDelta\varDelta'}{\delta\delta'}\cdot\frac{\varkappa'\lambda}{\varkappa\lambda'}\right)^2 &= \frac{\varDelta\varDelta'^3\cdot\frac{\varkappa'}{\varkappa} + \varDelta^3\varDelta'\cdot\frac{\lambda}{\lambda'}}{\delta\delta'}.\end{aligned}$$

In dieser Relation sind offenbar $\varkappa$, $\varkappa'$ und λ, λ' die speciellen Werthe, für welche $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ einen durch den Funda-

mentalpunkt (1, 0, 0) gehenden und $\lambda\Sigma + \lambda'\Sigma' = 0$ einen an der Fundamentallinie |1, 0, 0| liegenden Kegelschnitt darstellt, und es ist daher aus ihr der folgende Satz zu entnehmen: Wenn von einem Dreieck zwei Eckpunkte Punkte des Kegelschnitts $S = 0$ und die ihnen gegenüberliegenden Seitenlinien Grade des Kegelschnitts $\Sigma' = 0$ sind, so ist, wenn ausserdem die dritte Seite an dem Kegelschnitte $\lambda\Sigma + \lambda'\Sigma' = 0$ liegt, der dritte Eckpunkt ein Punkt des einen und des andern der durch die obige Gleichung bestimmten Kegelschnitte $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$, und, wenn der dritte Eckpunkt auf dem Kegelschnitt $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ liegt, die dritte Seitenlinie eine Grade des einen und des andern der durch sie bestimmten Kegelschnitte $\lambda\Sigma + \lambda'\Sigma' = 0$.

Insbesondere sind in diesem Satze, da $\alpha'_{11} = 0$ und damit $\lambda = 0$ und ferner $a_{11} = 0$ und damit $\varkappa' = 0$ angenommen werden kann, die folgenden Sätze enthalten:

Wenn von einem Dreieck zwei Eckpunkte Punkte des Kegelschnitts $S = 0$ und die Seitenlinien Grade des Kegelschnitts $\Sigma' = 0$ sind, so ist der dritte Eckpunkt ein Punkt des Kegelschnitts

$$4\Delta^3\Delta'^3 S + 3\delta\delta'(3\Theta'^2 - 4\Delta^3\Theta) S' = 0.$$

Wenn von einem Dreieck zwei Seitenlinien Grade des Kegelschnitts $\Sigma' = 0$ und die Eckpunkte Punkte des Kegelschnitts $S = 0$ sind, so ist die dritte Seitenlinie eine Grade des Kegelschnitts

$$4\Delta^3\Delta'^3\Sigma' + 3\delta\delta'(3\Theta^2 - 4\Delta'^3\Theta')\Sigma = 0.$$

Zwischen dem durch die Eckpunkte eines Dreiecks gehenden und dem an dessen Seitenlinien liegenden Kegelschnitte oder zwischen den einem Dreieck umschriebenen und ein- oder angeschriebenen Kegelschnitten $S = 0$ und $\Sigma' = 0$ besteht die Relation

$$3\Theta'^2 - 4\Delta^3\Theta = 0 \text{ oder } 3\Theta^2 - 4\Delta'^3\Theta' = 0.$$

43. Die Gleichung eines einem Dreieck umschriebenen Kegelschnitts ist, wenn dieses als Fundamentaldreieck angesehen wird, in Punktcoordinaten

$$2a_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0.$$

Da hiernach in diesem Falle

$$\Delta = -4J(\cot A_1 a_{23} + \cot A_2 a_{31} + \cot A_3 a_{12})$$

ist, so liegt auf dem hyperbolischen Kreise der Höhenpunkt eines jeden ihm eingeschriebenen Dreiecks. Das zu den drei Eckpunkten und dem Höhenpunkte des Dreiecks gehörige Diagonaldreieck, dessen Eckpunkte offenbar die Höhenfusspunkte sind, ist daher in Bezug auf den hyperbolischen Kreis sich selbst polar conjugirt und somit dessen Centrum ein Punkt des ihm umschriebenen Kreises; das Centrum des hyperbolischen Kreises liegt demnach auf dem Feuerbachschen Kreise eines jeden ihm eingeschriebenen Dreiecks.

Ferner bemerken wir, dass

$$\begin{aligned}\Delta^2 \mathfrak{S} = (s_2^2 a_{12}^2 + s_3^2 a_{13}^2 - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_{12} a_{13})\, \alpha_1^2 + \cdots \\ + 2\,(s_1^2 a_{21} a_{31} - s_2 s_3 \cos A_1 a_{23}^2 + s_3 s_1 \cos A_2 a_{23} a_{31} \\ - s_1 s_2 \cos A_3 a_{23} a_{12})\, \alpha_2 \alpha_3 + \cdots\end{aligned}$$

ist, und erkennen daraus sofort, dass für den Seitenmittelpunkt $(0, 1, 1)$ $\Delta^2 \mathfrak{S} = s_1^2 (\Delta + 4 a_{31} a_{12})$ und demzufolge nach dem 37. Abschnitte wegen $\mathfrak{R} = 4$, wenn die quadratischen halben Längen der durch ihn gehenden und der ihr polar conjugirten der Seitenlinie $|1, 0, 0|$ parallelen Diametrallinie durch $\alpha_1''^2$ und $\alpha_1'^2$ bezeichnet werden, seine quadratische Entfernung vom Centrum

$$\alpha_1'^2 = -\frac{s_1^2 \alpha_1''^2}{\alpha_1'^2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{a_{31} a_{12}}{\Delta}\right)$$

ist; darnach ist, da nach dem 36. Abschnitt

$$\frac{s_1^2}{4 \alpha_1'^2} + \frac{\alpha_1'^2}{\alpha_1''^2} = 1$$

ist, die quadratische Länge der der Seitenlinie $|1, 0, 0|$ parallelen Diametrallinie

$$\alpha_1'^2 = -\frac{s_1^2 a_{31} a_{12}}{\Delta}$$

und folglich wegen $\Delta^3 = -2 a_{23} a_{31} a_{12}$ und $b^2 \bar{b}^2 = -\frac{4 J^2 \Delta^6}{\Delta^8}$ das Quadrat des Radius des einem dem Kegelschnitt eingeschriebenen Dreieck umschriebenen Kreises

$$r_1'^2 = \frac{\alpha_1'^2 \alpha_2'^2 \alpha_3'^2}{b^2 \bar{b}^2}$$

gleich dem durch $b^2 \bar{b}^2$ dividirten Producte aus den

quadratischen halben Längen der den Seitenlinien parallelen Diametrallinien oder also der den durch die Durchschnittspunkte der zu den Eckpunkten gehörigen Graden des Kegelschnitts gehenden Diametrallinien polar conjugirten Diametrallinien. In der Form

$$4J^2 r'^2_1 = \frac{\mathfrak{S}_{\acute{\alpha}_1}\mathfrak{S}_{\acute{\alpha}_2}\mathfrak{S}_{\acute{\alpha}_3}}{\mathbf{R}_{\acute{\alpha}_1}\mathbf{R}_{\acute{\alpha}_2}\mathbf{R}_{\acute{\alpha}_3}}$$

geschrieben, zeigt diese Formel in bestimmter Form zugleich, dass das Quadrat des Radius des einem der Parabel eingeschriebenen Dreieck umschriebenen Kreises

$$r'^2_1 = \frac{p'_1 p'_2 p'_3}{r}$$

gleich ist dem durch den halben Parameter der Parabel dividirten Producte aus den halben Parametern der durch die Durchschnittspunkte der den Eckpunkten zugehörigen Graden der Parabel gehenden Diametrallinien.

Die Gleichung des einem Dreieck ein- oder angeschriebenen Kegelschnitts ist, wenn es als Fundamentaldreieck angenommen wird, in Liniencoordinaten

$$2\alpha_{23}a_2a_3 + 2\alpha_{31}a_3a_1 + 2\alpha_{12}a_1a_2 = 0.$$

Das Centrum des Kegelschnitts ist demnach durch die Form

$$(\alpha_{12} + \alpha_{13},\ \alpha_{21} + \alpha_{23},\ \alpha_{31} + \alpha_{32})$$

gegeben. Es erhellt daraus zunächst mit Rücksicht darauf, dass $\mathcal{A} = 2\Delta\,(\alpha_{23} + \alpha_{31} + \alpha_{12})$ und

$$\mathcal{A} = 2J\,(\cot A_1\lambda_1 + \cot A_2\lambda_2 + \cot A_3\lambda_3)$$

ist, wegen $(\alpha_{12} + \alpha_{13})^2 = \Delta\lambda_1$, u. s. f., dass die Potenz des Centrums des Kegelschnitts in Bezug auf den einem ihm umschriebenen Dreieck polar conjugirten Kreis gleich ist dem negativen quadratischen Radius des durch seine hyperbolischen Brennpunkte gehenden Kreises; insbesondere liegt daher das Centrum des hyperbolischen Kreises auf dem einem jeden ihm umschriebenen Dreieck polar conjugirten Kreise. Weiter ist offenbar der dem Centrum der Parabel in Bezug auf ein ihr umschriebenes Dreieck isogonal entsprechende

Punkt der Brennpunkt und daher dieser ein Punkt des jenem Dreieck umschriebenen Kreises; seine Form ist wegen $\alpha_{23} + \alpha_{31} + \alpha_{12} = 0$

$$\left(\frac{s_1^2}{\alpha_{23}}, \frac{s_2^2}{\alpha_{31}}, \frac{s_3^2}{\alpha_{12}}\right)$$

und demnach seine Polare wegen $s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 = -4J \cot A_1$, u. s. f.

$$|\cot A_1\alpha_{23}, \cot A_2\alpha_{31}, \cot A_3\alpha_{12}|,$$

der Höhenpunkt eines jeden der Parabel umschriebenen Dreiecks liegt daher auf ihrer Leitlinie.

Endlich entnehmen wir aus der für diesen Fall geltenden Gleichung

$$\begin{aligned}\Delta^4 \mathbf{S} = \alpha_{23}^2 (s_1^2\alpha_{23}^2 + s_2^2\alpha_{31}^2 + s_3^2\alpha_{12}^2 - 2s_2s_3 \cos A_1\alpha_{31}\alpha_{12} \\ + 2s_3s_1 \cos A_2\alpha_{12}\alpha_{23} + 2s_1s_2 \cos A_3\alpha_{23}\alpha_{31})\, \alpha_1^2 + \cdots \\ + 2\alpha_{31}\alpha_{12} (s_1^2\alpha_{23}^2 - s_2^2\alpha_{31}^2 - s_3^2\alpha_{12}^2 \\ - 2s_2s_3 \cos A_1\alpha_{31}\alpha_{12})\, \alpha_2\alpha_3 + \cdots,\end{aligned}$$

dass für den auf der Seitenlinie $|1, 0, 0|$ liegenden Punkt des Kegelschnitts $(0, \alpha_{12}, \alpha_{13})$ wegen $\Delta^3 = -2\alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{12}$ $\mathbf{S} = \Delta^2 s_1^2$ und somit wegen $\mathbf{R} = (\alpha_{12} + \alpha_{13})^2$ die quadratische halbe Länge der der durch ihn gehenden polar conjugirten Diametrallinie

$$\alpha_1'^2 = -\frac{\Delta^4 s_1^2}{\Delta\,(\alpha_{12} + \alpha_{13})^2}$$

ist; es ist daher, da der Flächeninhalt des durch die zu den Seitenlinien gehörigen Punkte des Kegelschnitts bestimmten Dreiecks

$$J' = \frac{-J\Delta^3}{(\alpha_{12} + \alpha_{13})(\alpha_{21} + \alpha_{23})(\alpha_{31} + \alpha_{32})}$$

ist, das Quadrat des Radius des einem dem Kegelschnitt umschriebenen Dreieck umschriebenen Kreises

$$r_2'^2 = \frac{\alpha_1'^2\alpha_2'^2\alpha_3'^2}{4b^2\bar{b}^2} \cdot \frac{J^2}{J'^2}$$

gleich dem durch $4b^2\bar{b}^2$ dividirten Product aus den quadratischen halben Längen der den durch die zu den Seitenlinien gehörigen Punkte des Kegelschnitts gehenden polar conjugirten Diametrallinien, mul-

tiplicirt mit dem quadratischen Verhältniss des Flächeninhalts des Dreiecks zum Flächeninhalt der durch die bezeichneten Punkte bestimmten Dreiecks.

Wegen $\alpha_{23} + \alpha_{31} + \alpha_{12} = 0$ im Falle der Parabel ist der Flächeninhalt eines der Parabel umschriebenen Dreiecks gleich dem halben Flächeninhalte des durch die zu den Seitenlinien desselben gehörigen Punkte der Parabel bestimmten Dreiecks. Das Quadrat des Radius des einem der Parabel umschriebenen Dreieck umschriebenen Kreises ist daher

$$r'^2_3 = \frac{p'_1 p'_2 p'_3}{16 r}$$

gleich dem durch den sechszehnfachen halben Parameter der Parabel dividirten Product aus den halben Parametern der durch die zu den Seitenlinien gehörigen Punkte der Parabel gehenden Diametrallinien.

44. Das Quadrat des Radius des durch drei Punkte des Kegelschnitts gehenden Kreises hat, wie aus der betreffenden Formel des vorigen Abschnitts erhellt, auch dann einen bestimmten Werth, wenn die drei Punkte in einen zusammenfallen. Man nennt den durch drei in einen Punkt zusammenfallende Punkte des Kegelschnitts gehenden Kreis den zu dem Punkte gehörigen Krümmungskreis des Kegelschnitts. Sein Centrum, das Krümmungscentrum, ist als der Durchschnittspunkt der durch die Seitenmittelpunkte des durch die drei Punkte bestimmten Dreiecks gehenden zu den Seitenlinien senkrechten Graden ein Punkt der Normallinie des Punktes und zwar der Durchschnittspunkt der Normallinien zweier in ihm zusammenfallender Punkte des Kegelschnitts. Sein Radius ist der sogenannte Krümmungsradius und nach dem vorigen Abschnitt durch die Formel

$$r'^2 = \frac{\alpha'^6}{b^2 \bar{b}^2},$$

die für die Parabel die Form

$$r'^2 = \frac{p'^3}{r}$$

annimmt und sich offenbar auch in den Formen

$$\mathrm{r}'^2 = \frac{\alpha'^2\alpha''^2}{\mathrm{b}^2\bar{\mathrm{b}}^2}\cdot \mathrm{p}'^2,\ \mathrm{r}'^2 = \frac{\acute{\mathrm{n}}^6}{\mathrm{r}^4},\ \mathrm{r}'^2\acute{\mathrm{m}}^2 = \acute{\mathrm{n}}^2\acute{\bar{\mathrm{n}}}^2 = \alpha'^4$$

darstellen lässt, gegeben. **Der Krümmungsradius für einen Scheitelpunkt der ersten Hauptdiametrallinie ist der halbe Parameter des Kegelschnitts.**

Der vierte von den offenbar vier mit dem Kegelschnitt gemeinschaftlichen Punkten des Krümmungskreises fällt mit den drei in einen Punkt zusammenfallenden im Allgemeinen nicht zusammen, indem nach dem folgenden Abschnitte nur für die Scheitelpunkte alle vier Punkte in einen zusammenfallen; der Krümmungskreis für einen Punkt ist daher, wenn die zu ihm gehörige Grade des Kegelschnitts und eine bestimmte durch ihn gehende Grade durch die Gleichung $S' = 0$ bezeichnet werden, durch die Gleichung $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ gegeben, weil nach dieser Gleichung jedenfalls drei von den ihm angehörigen Punkten des Kegelschnitts in einen zusammenfallen.

Noch mag bemerkt werden, dass nach der letzten Formel des vorigen Abschnitts das Quadrat des Radius des durch die Durchschnittspunkte dreier in eine Grade zusammenfallender Graden der Parabel gehenden Kreises $\frac{\mathrm{p}'^3}{16\mathrm{r}}$ ist; die drei Durchschnittspunkte fallen mit einem Punkte der Parabel, auf dessen Normallinie das Centrum des Kreises liegt, zusammen.

45. Ein Kegelschnitt, dessen mit dem Kegelschnitt gemeinschaftliche vier Punkte auf zwei zusammenfallenden oder also auf einer Graden liegen, so dass darnach, je nachdem diese Grade eine Grade des Kegelschnitts ist, oder nicht, **alle vier oder blos zwei und zwei in einen Punkt zusammenfallen**, ist, wenn sie die Gleichung $S'' = 0$ darstellt, durch die Gleichung $\varkappa S + \varkappa' S'' = 0$ gegeben, und demgemäss für ihn, wenn wir den Pol der Graden durch die Gleichung $\Sigma'' = 0$, die wir als so beschaffen voraussetzen, dass $\Delta^2 S''$ und $\Delta^2 \Sigma''$ durch die Substitutionsgleichungen 6. und 7. in einander übergehen, repräsentiren, mit Rücksicht auf den 13. und 16. Abschnitt

$$\Delta'^3 = \Delta^3\varkappa^3 + \Delta S_{\acute{\alpha}}\cdot\varkappa^2\varkappa'$$
$$A' = \varkappa A + \varkappa' \mathbf{S}_{\acute{\alpha}}\cdot$$

$$\mathit{\Delta}' = \varkappa^2 \mathit{\Delta} - \varkappa\varkappa' \cdot \frac{\Delta^3 \mathbf{R}_{\alpha'} - \Delta \mathrm{S}_{\alpha'}}{\Delta^2} = \varkappa^2 \mathit{\Delta} - \varkappa\varkappa' \mathbf{G}_{\alpha'}$$

$$\mathbf{A}'^2 = \varkappa^2 \mathbf{A}^2 + 2\varkappa\varkappa' (-8\mathrm{J}^2 \mathbf{G}_{\alpha'} + \mathit{\Delta}\mathbf{S}_{\alpha'}) + \varkappa'^2 \mathbf{S}^2_{\alpha'}.$$

Hiernach ist zunächst der Kegelschnitt ein elliptischer Kreis, wenn

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} \cdot \mathbf{S}^2_{\alpha'} = 8\mathrm{J}^2 \mathbf{G}_{\alpha'} - \mathit{\Delta}\mathbf{S}_{\alpha'} - \sqrt[2]{\begin{matrix}(-8\mathrm{J}^2 \mathbf{G}_{\alpha'} + (\mathit{\Delta} + \mathbf{A})\,\mathbf{S}_{\alpha'}) \\ (-8\mathrm{J}^2 \mathbf{G}_{\alpha'} + (\mathit{\Delta} - \mathbf{A})\,\mathbf{S}_{\alpha'})\end{matrix}}$$

oder also, wenn wir den Punkt $\Sigma' = 0$ als einen Punkt einer der Diametrallinien

$\alpha'^2 \mathit{\Delta}\,(\Delta^3 \mathbf{R} - \Delta \mathrm{S}) + \Delta^5 \mathbf{S} = 0$ oder $\alpha'^2 \mathit{\Delta} \mathbf{G} + \Delta^3 \mathbf{S} = 0$,

deren quadratische halbe Länge die Grösse α''^2 ist, ansehen, weil dann

$$\mathbf{G}_{\alpha'} = -\frac{\Delta^3 \mathbf{S}_{\alpha'}}{\alpha'^2 \mathit{\Delta}}$$

ist, wenn

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} \cdot \mathbf{S}_{\alpha'} = -\mathit{\Delta} - \frac{8\mathrm{J}^2 \Delta^3}{\alpha'^2 \mathit{\Delta}} - \sqrt[2]{\frac{-16\mathrm{J}^2 \mathit{\Delta}\,(\alpha'^2 - \mathrm{b}^2)(\alpha'^2 - \bar{\mathrm{b}}^2)}{\alpha'^4}}$$

oder endlich wegen der Formeln $(\mathrm{b}^2 - \alpha'^2)(\bar{\mathrm{b}}^2 - \alpha'^2) = \mathrm{b}^2\bar{\mathrm{b}}^2 - \alpha'^2\alpha''^2$ und $\mathrm{b}^2\bar{\mathrm{b}}^2 = -\frac{4\mathrm{J}^2 \Delta^6}{\mathit{\Delta}^3}$ wenn

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} \cdot \mathbf{S}_{\alpha'} = -\mathit{\Delta} - \frac{8\mathrm{J}^2 \Delta^3}{\alpha'^2 \mathit{\Delta}} \left(1 + \sqrt[2]{1 - \frac{\alpha'^2\alpha''^2}{\mathrm{b}^2\bar{\mathrm{b}}^2}}\right)$$

ist; und das Quadrat des Radius (des halben Parameters) desselben ist

$$\frac{8\,.\,16\mathrm{J}^4 \Delta'^3}{\mathbf{A}'^3} = \frac{8\,.\,16\mathrm{J}^4\,(\Delta^3 + \Delta \mathrm{S}_{\alpha'} \cdot \frac{\varkappa'}{\varkappa})}{(\mathit{\Delta} + \frac{\varkappa'}{\varkappa}\mathbf{S}_{\alpha'})^3}$$

oder also, da man aus der obigen Gleichung der Diametrallinie in Erinnerung daran, dass die quadratische Entfernung des Punktes vom Centrum

$$\alpha'^2 = -\frac{\alpha''^2}{\alpha'^2} \cdot \frac{\Delta^2 \mathbf{S}_{\alpha'}}{\mathit{\Delta}\mathbf{R}_{\alpha'}}$$

ist,

$$S_{\acute{\alpha}} = \frac{\Delta^5 (\acute{\alpha}^2 - \alpha''^2)}{\alpha'^2 \acute{\alpha}^2 \Delta^2} \cdot \mathfrak{S}_{\acute{\alpha}}$$

findet,

$$\frac{\alpha'^6}{\mathfrak{b}^2 \bar{\mathfrak{b}}^2} \cdot \frac{1 + \frac{\Delta^3 (\acute{\alpha}^2 - \alpha''^2)}{\alpha'^2 \acute{\alpha}^2 \Delta^2} \cdot \frac{\varkappa'}{\varkappa} \mathfrak{S}_{\acute{\alpha}}}{\left(1 + \sqrt[2]{1 - \frac{\alpha'^2 \alpha''^2}{\mathfrak{b}^2 \bar{\mathfrak{b}}^2}}\right)^3}$$

oder

$$\frac{\alpha'^2}{\acute{\alpha}^2 \mathfrak{b}^2 \bar{\mathfrak{b}}^2} \cdot \frac{\alpha'^2 \alpha''^2 (\mathfrak{c}^2 - \acute{\alpha}^2) + 2\mathfrak{b}^2 \bar{\mathfrak{b}}^2 (\acute{\alpha}^2 - \alpha''^2) \cdot \left(1 + \sqrt[2]{1 - \frac{\alpha'^2 \alpha''^2}{\mathfrak{b}^2 \bar{\mathfrak{b}}^2}}\right)}{\left(1 + \sqrt[2]{1 - \frac{\alpha'^2 \alpha''^2}{\mathfrak{b}^2 \bar{\mathfrak{b}}^2}}\right)^3}.$$

Der unter dem Wurzelzeichen, das die Existenz zweier elliptischer Kreise, deren mit dem Kegelschnitte gemeinschaftliche vier Punkte auf der Polare eines Punktes liegen, anzeigt, stehende Ausdruck ist im Allgemeinen für jede reelle Diametrallinie negativ, wie sich daraus ergiebt, dass

$$\frac{\alpha'^2 \alpha''^2 - \mathfrak{b}^2 \bar{\mathfrak{b}}^2}{\alpha'^2},$$

weil in der Form $\alpha''^2 - \frac{\mathfrak{b}^2 \bar{\mathfrak{b}}^2}{\alpha'^2}$ darstellbar, das Quadrat der Entfernung eines Punktes $\Sigma = 0$ des Kegelschnitts von dem auf der ihm zugehörigen Graden desselben liegenden Punkte der zu ihr senkrechten Graden des Centrums ist; nur für die Hauptdiametrallinien ist er Null. Deshalb sind auch jene zwei elliptischen Kreise höchstens nur dann reell und zugleich fallen sie mit einander zusammen, wenn der gegebene Punkt ein Punkt der Hauptdiametrallinien ist.

Der obige Ausdruck nimmt für $\alpha''^2 = \mathfrak{b}^2$, $\alpha'^2 = \bar{\mathfrak{b}}^2$ die Form

$$+ \bar{\mathfrak{b}}^2 \left(1 - \frac{\mathfrak{c}^2}{\acute{\alpha}^2}\right)$$

an und lässt daraus in Erinnerung an die Formeln 25. und 27. des 21. Abschnitts den Satz entnehmen: Das Quadrat des Radius (des halben Parameters) des elliptischen

Kreises, dessen mit dem Kegelschnitt gemeinschaftliche vier Punkte auf der Polare eines der auf der ersten Hauptdiametrallinie liegenden Punkte

$$\varkappa 16 J^2 \Delta^3 P + \varkappa' B = 0$$

liegen, ist

$$+\frac{\bar{b}^2 (\mathcal{A} - A)\varkappa}{\varkappa'} \text{ oder } \frac{r^2 (\mathcal{A} + A)\varkappa}{\varkappa'};$$

für die Scheitelpunkte ist es r^2, für die hyperbolischen Brennpunkte $\frac{2r^2}{e^2}$ und für die elliptischen Brennpunkte 0.

Für $\alpha'^2 = \alpha''^2$ erhält man weiter den Satz: Das Quadrat des Radius eines jeden der zwei elliptischen Kreise, deren mit dem Kegelschnitt gemeinschaftliche vier Punkte mit dem Punkte $\Sigma' = 0$ desselben zusammenfallen, ist gleich dem zu diesem Punkte gehörigen quadratischen Krümmungsradius, dividirt durch die dritte Potenz des Ausdrucks

$1 + \sqrt[2]{1 - \frac{\alpha'^2\alpha''^2}{b^2\bar{b}^2}}$, der für die Parabel die Form

$1 + \sqrt[2]{1 - \frac{p'}{r}}$ annimmt.

Der Kegelschnitt ist ferner eine Parabel, wenn

$$\varkappa \mathcal{A} - \varkappa' \mathfrak{G}_{\alpha'} = 0$$

ist, und demnach mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{\mathcal{A}\mathfrak{S}_{\alpha'}}{\mathfrak{G}_{\alpha'}} = -\frac{\alpha'^2 \mathcal{A}^2}{\Delta^3}, \quad \frac{\mathcal{A}S_{\alpha'}}{\mathfrak{G}_{\alpha'}} = -\Delta^2 + \frac{\alpha''^2 \Delta^2}{\alpha'^2}$$

ist, deren quadratischer halber Parameter

$$\frac{16 J^4 \Delta'^3}{\mathcal{A}'^3} = \frac{16 J^4 \Delta \left(\Delta^2 + \frac{\mathcal{A} S_{\alpha'}}{\mathfrak{G}_{\alpha'}}\right)}{\left(\mathcal{A} + \frac{\mathcal{A}\mathfrak{S}_{\alpha'}}{\mathfrak{G}_{\alpha'}}\right)^3} = \frac{b^4 \bar{b}^4}{\alpha'^2 \alpha''^4}.$$

Der quadratische halbe Parameter der Parabel, deren mit dem Kegelschnitt gemeinschaftliche vier Punkte auf der Polare des Punktes $\Sigma' = 0$ liegen, ist also

$$\frac{b^4 \bar{b}^4}{\alpha'^2 \alpha''^4};$$

für die Parabel ist er r^2, da jene Parabel nach der obigen Bedingungsgleichung wegen $\Delta = 0$ mit ihr zusammenfällt, und demnach stets

$$p'^2 = \frac{\Delta \mathfrak{S}^2_{\alpha'}}{\Delta \mathfrak{R}^2_{\alpha'}}.$$

Ferner bemerken wir unter Hinweis auf die Formeln 25. bis 28. des 21. Abschnitts den folgenden Satz: Der quadratische halbe Parameter der Parabel, deren mit dem Kegelschnitt gemeinschaftliche vier Punkte auf der Polare eines der auf der ersten Hauptdiametrallinie liegenden Punkte

$$\varkappa 16 J^2 \Delta^3 \boldsymbol{P} + \varkappa' B = 0 \text{ oder } \varkappa 16 J^2 \Delta^3 \boldsymbol{P} + \varkappa' \boldsymbol{B} = 0$$

liegen, ist

$$\frac{r^2 (\varkappa' - (\Delta - \boldsymbol{\Delta}) \varkappa)}{e^2 \varkappa'} \text{ resp. } \frac{r^2 (\varkappa' - (\boldsymbol{\Delta} - \Delta) \varkappa)}{\mathfrak{e}^2 \varkappa'};$$

für die Scheitelpunkte ist er r^2, für die elliptischen Brennpunkte $\frac{r^2}{e^2}$ und für die hyperbolischen $\frac{r^2}{\mathfrak{e}^2}$.

Endlich ist der Kegelschnitt ein hyperbolischer Kreis, wenn

$$\varkappa \Delta + \varkappa' \mathfrak{S}_{\alpha'} = 0$$

ist, und demnach mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{\Delta \mathfrak{G}_{\alpha'}}{\mathfrak{S}_{\alpha'}} = -\frac{\Delta \mathfrak{c}^2}{\alpha'^2}, \quad \frac{\Delta S_{\alpha'}}{\mathfrak{S}_{\alpha'}} = \frac{\Delta^2 \mathfrak{c}^2 (\alpha'^2 - \alpha''^2)}{\alpha'^2 \alpha'^2}$$

ist, der biquadratische halbe Parameter des hyperbolischen Kreises, dessen mit dem Kegelschnitt gemeinschaftliche vier Punkte auf der Polare des Punktes $\Sigma' = 0$ liegen,

$$\frac{8^2 . 16^2 J^8 \Delta'^6}{\boldsymbol{\Delta}'^6} = \frac{4 J^2 \Delta'^6}{\Delta'^3} = \frac{4 J^2 \Delta^2 \left(\Delta^2 - \frac{\Delta S_{\alpha'}}{\mathfrak{S}_{\alpha'}}\right)^2}{\left(\Delta + \frac{\Delta \mathfrak{G}_{\alpha'}}{\mathfrak{S}_{\alpha'}}\right)^3}$$

oder

$$\frac{b^2 \bar{b}^2 \alpha'^2 (\mathfrak{c}^2 - \alpha'^2)^2}{\alpha''^2 \alpha'^4}.$$

Für $\alpha''^2 = \mathfrak{b}^2$, $\alpha'^2 = \bar{\mathfrak{b}}^2$ ist dieser Ausdruck das Quadrat von

$$-\bar{\mathfrak{b}}^2\left(1 - \frac{\mathfrak{c}^2}{\acute{\alpha}^2}\right),$$

und daraus in Erinnerung an die Formeln 26. und 28. des 21. Abschnitts der Satz zu erkennen: Das Quadrat des (ersten oder zweiten) halben Parameters des hyperbolischen Kreises, dessen mit dem Kegelschnitt gemeinschaftliche vier Punkte auf der Polare eines der auf der ersten Hauptdiametrallinie liegenden Punkte

$$\varkappa 16 J^2 \Delta^3 P + \varkappa' B = 0$$

liegen, ist

$$-\frac{\bar{\mathfrak{b}}^2 (A - \mathcal{A})\varkappa}{\varkappa'} \text{ oder } \frac{\mathfrak{r}^2 (A + \mathcal{A})\varkappa}{\varkappa'};$$

für die Scheitelpunkte ist es $\mathfrak{r}^2$, für die elliptischen Brennpunkte $\frac{2\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{e}^2}$ und für die hyperbolischen Brennpunkte 0.

Null ist der Parameter des hyperbolischen Kreises wegen $\acute{\alpha}^2 = \mathfrak{c}^2$ überhaupt für alle Punkte des durch die hyperbolischen Brennpunkte gehenden Kreises, für welche er nämlich in zu einander senkrechte Grade degenerirt.

Schliesslich heben wir den Fall $\acute{\alpha}^2 = \alpha''^2$ hervor: Der biquadratische halbe Parameter des hyperbolischen Kreises, dessen mit dem Kegelschnitt gemeinschaftliche vier Punkte in einen Punkt desselben zusammenfallen, ist

$$\frac{\mathfrak{b}^2\bar{\mathfrak{b}}^2\alpha'^6}{\alpha''^6}$$

und darnach im Falle der Parabel

$$\mathfrak{r}\mathfrak{p}'^3.$$

46. Nimmt man das durch zwei Punkte des Kegelschnitts und den Pol ihrer Verbindungslinie oder durch zwei Grade des Kegelschnitts und die Polare ihres Durchschnittspunktes gebildete Dreieck als Fundamentaldreieck an, so ist der Kegelschnitt in Punkt- und Liniencoordinaten durch die Gleichungen

$$\mathfrak{a}_{11}\alpha_1^2 + 2\mathfrak{a}_{23}\alpha_2\alpha_3 = 0,\ \alpha_{11}\mathfrak{a}_1^2 + 2\alpha_{23}\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 = 0$$

dargestellt, vorausgesetzt, dass der Pol und die Polare als durch die Formen (1, 0, 0) und |1, 0, 0| gegeben angesehen werden, denn einerseits muss, weil die Fundamentalpunkte (0, 1, 0), (0, 0, 1) auf und die Fundamentallinien |0, 1, 0|, |0, 0, 1| an dem Kegelschnitt liegen,

$$\mathrm{a}_{22} = 0,\ \mathrm{a}_{33} = 0,\ \alpha_{22} = 0,\ \alpha_{33} = 0$$

und andererseits, weil die Polare von (1, 0, 0) die Grade $|\mathrm{a}_{11}, \mathrm{a}_{12}, \mathrm{a}_{13}|$ und der Pol von |1, 0, 0| der Punkt $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$ ist,

$$\mathrm{a}_{31} = 0,\ \mathrm{a}_{12} = 0,\ \alpha_{31} = 0,\ \alpha_{12} = 0$$

sein. Zufolge der Bedeutung der Coordinaten liegt in diesen Gleichungen der folgende Satz: Das Product der senkrechten Abstände eines Punktes des Kegelschnitts von zwei Graden desselben steht zu seinem senkrechten Quadratabstande von der Polare ihres Durchschnittspunktes, und das Product der senkrechten Abstände zweier Punkte des Kegelschnitts von einer Graden desselben zum senkrechten Quadratabstande des Pols ihrer Verbindungslinie von ihr in constantem Verhältniss. Insbesondere ist für die Parabel

$$\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_3 = 0,$$

weil $\varDelta = \varDelta\,(\alpha_{11} + 2\alpha_{23}) = \mathrm{a}_{23}^2 + 2\mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{23}$ ist, und für den elliptischen Kreis

$$\mathrm{s}_2\mathrm{s}_3\alpha_1^2 - \mathrm{s}_1^2\alpha_2\alpha_3 = 0,\ \mathrm{s}_2 = \mathrm{s}_3,$$

weil $-2\mathrm{a}_{23} : \mathrm{a}_{11} : \mathrm{a}_{11} = \mathrm{s}_1^2 : \mathrm{s}_2^2 : \mathrm{s}_3^2$ ist, und es gelten daher auch insbesondere die Sätze: Der Quadratinhalt des durch einen Punkt der Parabel mit zwei Punkten derselben bestimmten Dreiecks ist gleich dem Producte der Inhalte der von ihm mit je einem dieser Punkte und dem Pole ihrer Verbindungslinie bestimmten Dreiecke. Das Product der senkrechten Abstände eines Punktes des elliptischen Kreises von zwei Graden desselben ist gleich dem senkrechten Quadratabstande von der Polare ihres Durchschnittspunktes. Der Durchschnittspunkt zweier Graden des elliptischen Kreises liegt von den zu ihnen gehörigen Punkten desselben gleich weit ab.

Für die in diesem Abschnitte vorausgesetzte Lage des Fundamentaldreiecks hat man

$$\Delta^2 \mathfrak{S} = s_1^2 a_{11}^2 \alpha_1^2 + s_2^2 a_{23}^2 \alpha_2^2 + s_3^2 a_{23}^2 \alpha_3^2 - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_{23}^2 \alpha_2 \alpha_3$$
$$- 2 s_1 s_2 \cos A_3 a_{23} a_{11} \alpha_3 \alpha_1 - 2 s_3 s_1 \cos A_2 a_{23} a_{11} \alpha_1 \alpha_2,$$

und diese einfache Form der Function lässt, wie in früheren Fällen, so auch hier einige bemerkenswerthe Relationen und Sätze leicht erkennen.

Die auf der durch den Punkt (1, 0, 0) gehenden Diametrallinie liegenden Punkte des Kegelschnitts sind offenbar durch die Form

$$\left(\sqrt[2]{-2a_{23}},\ \sqrt{a_{11}},\ \sqrt{a_{11}}\right)$$

gegeben; es ist für sie daher

$$\Delta^2 \mathfrak{S} = -\tfrac{1}{2} s_1^2 a_{11} a_{23} \left(\sqrt[2]{-2a_{23}} + 2\sqrt{a_{11}}\right)^2 = -\frac{s_1^2 \Delta^3}{2a_{23}} \cdot \mathbf{R}$$

und demzufolge, wie man mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\Delta^3 = a_{11} a_{23}^2,\quad \mathcal{A} = s_1^2 a_{11} - 2 s_2 s_3 \cos A_1 a_{23}$$
$$3\sigma_1^2 = s_1^2 + 4 s_2 s_3 \cos A_1,\quad 2a_{23}\mathcal{A} = \Delta s_1^2 - 3\sigma_1^2 a_{23}^2$$

leicht erkennt, der halbe Parameter der durch den Punkt (1, 0, 0) gehenden Diametrallinie durch die Gleichung

$$\frac{-2a_{23}}{a_{11}} = \frac{s_1^4}{3\sigma_1^2 p_1'^2}$$

— σ_1^2 ist das dreifache Quadrat der Entfernung des Punktes vom Schwerpunkte des Fundamentaldreiecks — gegeben. In Folge dieser Gleichung ist

$$\Delta = -\frac{a_{23}^2}{s_1^4} \cdot (12\sigma_1^2 p_1'^2 - s_1^4)$$

$$\mathcal{A} = -\frac{a_{23}}{2s_1^2} \cdot (12\sigma_1^2 p_1'^2 - s_1^4 + 3 s_1^2 \sigma_1^2)$$

und demnach zunächst für die Parabel

$$12\sigma_1^2 p_1'^2 - s_1^4 = 0,$$

für den hyperbolischen Kreis

$$12\sigma_1^2 p_1'^2 - s_1^4 + 3 s_1^2 \sigma_1^2 = 0$$

und für den elliptischen Kreis

$$(12\sigma_1^2 p_1'^2 - s_1^4 + 3 s_1^2 \sigma_1^2)^2 - 64 J^2 (12\sigma_1^2 p_1'^2 - s_1^4) = 0.$$

Die quadratische halbe Länge der der bezeichneten Diametrallinie polar conjugirten oder der der Graden |1, 0, 0| parallelen Diametrallinie ist

$$\alpha_1'^2 = \frac{s^2 \Delta^3}{2a_{23}\mathcal{A}} \text{ oder } \alpha_1'^2 = \frac{3 s_1^2 \sigma_1^2 p_1'^2}{12\sigma_1^2 p_1'^2 - s_1^4}.$$

Für die Punkte (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) ist $\mathbf{R} = 1$ und $\Delta^2\mathbf{S}$ beziehungsweise $s_1^2 a_{11}^2$, $s_2^2 a_{22}^2$, $s_3^2 a_{33}^2$. Demnach sind ferner die quadratischen halben Längen der den Graden |0, 1, 0|, |0, 0, 1| parallelen Diametrallinien

$$\alpha_2'^2 = -\frac{s_3^2 a_{33}^2}{\Delta}, \; \alpha_3'^2 = -\frac{s_2^2 a_{22}^2}{\Delta}$$

oder

$$\alpha_2'^2 = \frac{s_1^4 s_3^2}{12\sigma_1^2 p_1'^2 - s_1^4}, \; \alpha_3'^2 = \frac{s_1^4 s_2^2}{12\sigma_1^2 p_1'^2 - s_1^4},$$

so dass also die Relation

$$\alpha_2'^2 . \sin^2 A_2 = \alpha_3'^2 \sin^2 A_3 = \frac{4J^2 s_1^2}{12\sigma_1^2 p_1'^2 - s_1^4}$$

besteht, und der senkrechte Quadratabstand des Centrums von der Graden |1, 0, 0|

$$m_1'^2 = -\frac{b^2 \bar{b}^2 \Delta}{s_1^2 a_{11}^2} = \frac{4J^2 \Delta^6}{s_1^2 a_{11}^2 \Delta^2}$$

oder

$$m_1'^2 = \frac{4J^2 s_1^6}{(12\sigma_1^2 p_1'^2 - s_1^4)^2}.$$

Das Quadrat des Radius des einem durch zwei Grade des Kegelschnitts und die Polare ihres Durchschnittspunktes gebildeten Dreieck umschriebenen Kreises ist somit offenbar

$$r_0'^2 = \frac{\alpha_2'^2 \alpha_3'^2}{4m_1'^2}$$

gleich dem durch den vierfachen senkrechten Quadratabstand des Centrums von der Polare dividirten Product aus den quadratischen halben Längen der jenen Graden parallelen Diametrallinien. Es lässt sich auch in der Form

$$r_0'^2 = \frac{\alpha_1'^2 \alpha_2'^2 \alpha_3'^2}{4b^2\bar{b}^2} \cdot \frac{\alpha_1'^2}{\alpha_1''^2},$$

in der $\alpha_1'^2$ die quadratische Entfernung des Punktes (1, 0, 0) vom Centrum ist, darstellen, und dadurch sofort erkennen, dass das Quadrat des Radius des einem durch zwei Punkte der Parabel und den Pol ihrer Verbindungslinie bestimmten Dreieck umschriebenen Kreises

$$r'^2_0 = \frac{p'_1 p'_2 p'_3}{4r}$$

gleich ist dem durch den vierfachen halben Parameter derselben dividirten Product aus den halben Parametern der durch sie gehenden Diametrallinien.

Der Radius des durch zwei in einen Punkt zusammenfallende Punkte des Kegelschnitts und den gleichfalls in ihn fallenden Pol ihrer Verbindungslinie gehenden Kreises ist der halbe zu dem Punkte gehörige Krümmungsradius.

Endlich sieht man sofort, dass für den Durchschnittspunkt der durch den Punkt (1, 0, 0) gehenden Diametrallinie mit seiner Polare (0, 1, 1) $\Delta^2 \mathbf{S} = s_1^2 a_{23}^2$, $\mathbf{R} = 4$ und demzufolge der senkrechte Quadratabstand des Centrums von seiner Polare

$$m'^{\cdot 2}_{1\cdot} = -\frac{4b^2 \bar{b}^2 \Delta}{s_1^2 a_{23}^2} = \frac{16J^2 \Delta^6}{s_1^2 a_{23}^2 \Delta^2}$$

oder

$$m'^{\cdot 2}_{1\cdot} = \frac{9 \,.\, 64J^2 \sigma_1^4 p'^4_1}{s_1^2 (12\sigma_1^2 p'^2_1 - s_1^4)^2}$$

ist; es ist daher

$$64J^2 = \frac{s_1^6 m'^{\cdot 2}_{1\cdot}}{\alpha'^4_1}$$

oder also *der achtfache Inhalt des durch die auf einer Graden liegenden Punkte des Kegelschnitts und ihren Pol bestimmten Dreiecks gleich dem Product aus ihrer kubischen Länge und dem senkrechten Abstande des Centrums von der Polare ihres Mittelpunkts in Bezug auf den Kegelschnitt, dividirt durch die quadratische halbe Länge der ihr parallelen Diametrallinie.* Man kann auch nach dieser Formel

$$64J^2 = \frac{s_1^6}{r'^2_1} \cdot \frac{\alpha''^2_1}{\alpha'^{\cdot 2}_{1\cdot}}$$

setzen; darnach ist *der achtfache Inhalt des durch die auf einer Graden liegenden Punkte der Parabel und ihren Pol bestimmten Dreiecks gleich ihrer kubischen Länge, dividirt durch den zu der durch ihren Pol gehenden Diametrallinie gehörigen Krümmungsradius.*

Die Annahme, dass die Grade $|1, 0, 0|$ eine Grade der elliptischen Brennpunkte der ersten Hauptdiametrallinie ist, bedingt die Gleichung

$$(A + A)\,\alpha_{11} - 2\Delta^2 s_1^2 = 0 \text{ oder } (A + A)\,a_{22}^2 = 2\Delta^3 s_1^2$$

und führt durch sie auf die folgenden Sätze. Zwischen der Entfernung der auf einer Graden der elliptischen Brennpunkte der ersten Hauptdiametrallinie liegenden Punkte des Kegelschnitts und der halben Länge der ihr parallelen Diametrallinie besteht die Relation

$$4\alpha_1'^4 = b^2 s_1^2;$$

für die Parabel ist

$$4p_1'^2 = s_1^2$$

und also der Parameter einer Diametrallinie der Parabel gleich der Entfernung der auf der Polare ihres Durchschnittspunktes mit der elliptischen Leitlinie liegenden Punkte der Parabel. Ferner findet man, dass

$$\alpha_2'^2 \sin^2 A_2 = \bar{b}^2$$

und insbesondere für die Parabel

$$p_2' \sin^2 A_2 = r$$

ist.

47. Die Gleichung des Kegelschnitts sowohl in Punkt-, als auch in Liniencoordinaten enthält sechs Constante, und es ist daher der Kegelschnitt, weil offenbar nur von deren Werthverhältnissen zu einer von ihnen abhängig, durch fünf lineare Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten vollständig und eindeutig bestimmt. So bestimmen fünf Punkte und ebenso fünf Grade stets einen und nur einen Kegelschnitt, wenn sie als Punkte und beziehungsweise Grade desselben aufgefasst werden, dagegen z. B. vier Punkte, wenn drei von ihnen als Punkte und der vierte als Centrum des Kegelschnitts angesehen werden, vier Kegelschnitte, weil in jenem Falle fünf lineare, in diesem aber drei lineare und zwei quadratische Gleichungen diese Bedingungen ausdrücken.

Da nun der Kegelschnitt stets durch fünf Punkte bestimmt ist, so ist demzufolge derselbe, wenn vier von ihnen als die Durchschnittspunkte der Graden

$|a'_{11}, a'_{12}, a'_{13}|, |a'_{21}, a'_{22}, a'_{23}|; |a'_{21}, a'_{22}, a'_{23}|, |a'_{41}, a'_{42}, a'_{43}|;$
$|a'_{41}, a'_{42}, a'_{43}|, |a'_{31}, a'_{32}, a'_{33}|; |a'_{31}, a'_{32}, a'_{33}|, |a'_{11}, a'_{12}, a'_{13}|$
gegeben sind, durch die Gleichung

$$\mu(a'_{11}\alpha_1 + a'_{12}\alpha_2 + a'_{13}\alpha_3)(a'_{41}\alpha_1 + a'_{42}\alpha_2 + a'_{43}\alpha_3)$$
$$+ \mu'(a'_{21}\alpha_1 + a'_{22}\alpha_2 + a'_{23}\alpha_3)(a'_{31}\alpha_1 + a'_{32}\alpha_2 + a'_{33}\alpha_3) = 0$$

dargestellt, sofern die Constanten μ, μ' durch Substitution der Coordinaten des fünften Punktes in diese Gleichung bestimmt sind, oder also auch, wenn diese Constanten implicite der Coordinaten der Graden gedacht werden, wie auch in anderer Weise in Erinnerung an die Gleichung $\varkappa S + \varkappa' S' = 0$ erkannt wird, durch die Gleichung

$$(a'_{11}\alpha_1 + a'_{12}\alpha_2 + a'_{13}\alpha_3)(a'_{41}\alpha_1 + a'_{42}\alpha_2 + a'_{43}\alpha_3)$$
$$- (a'_{21}\alpha_1 + a'_{22}\alpha_2 + a'_{23}\alpha_3)(a'_{31}\alpha_1 + a'_{32}\alpha_2 + a'_{33}\alpha_3) = 0$$

gegeben, der offenbar die Coordinaten des Durchschnittspunktes jeder zwei Graden von der Form

$$\varkappa(a'_{11}\alpha_1 + a'_{12}\alpha_2 + a'_{13}\alpha_3) + \varkappa'(a'_{21}\alpha_1 + a'_{22}\alpha_2 + a'_{23}\alpha_3) = 0$$
$$\varkappa(a'_{31}\alpha_1 + a'_{32}\alpha_2 + a'_{33}\alpha_3) + \varkappa'(a'_{41}\alpha_1 + a'_{42}\alpha_2 + a'_{43}\alpha_3) = 0$$

genügen. Daraus aber folgt, wenn wir die Grade $|\varkappa, \varkappa'|$ eines Punktes und die Grade $|\lambda, \lambda'|$ eines andern Punktes als einander entsprechend bezeichnen, wenn $\frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{\lambda'}{\lambda}$ ist, der Satz:

Der Ort des Durchschnittspunktes der entsprechenden Graden zweier Punkte ist ein durch diese Punkte gehender Kegelschnitt. Das Doppelverhältniss der durch vier Punkte des Kegelschnitts gehenden Graden eines Punktes des Kegelschnitts ist daher für jede Lage dieses Punktes constant; man nennt es deshalb das Doppelverhältniss der vier Punkte des Kegelschnitts. In gleicher Weise ist der Ort der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte zweier Graden ein an diesen Graden liegender Kegelschnitt, und das Doppelverhältniss der auf vier Graden des Kegelschnitts liegenden Punkte einer jeden Graden des Kegelschnitts, das Doppelverhältniss der vier Graden des Kegelschnitts, constant.

Von der Anwendbarkeit dieses constanten Doppelverhältnisses zum Beweise und zur Herleitung von Sätzen geben wir einige Beispiele.

Die drei Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seitenlinien eines jeden durch sechs Punkte des Kegelschnitts bestimmten Sechsecks liegen auf einer Graden; es sind also, wenn A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 diese Punkte sind, die Durchschnittspunkte B_1, B_2, B_3 der Graden

$$A_1A_2,\ A_4A_5;\ A_2A_3,\ A_5A_6;\ A_3A_4,\ A_6A_1$$

Punkte einer Graden, denn es ist, wenn wir das Doppelverhältniss z. B. der durch die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 gehenden Graden des Punktes B_1 durch $|B_1 . A_1A_2A_3A_4|$ bezeichnen,

$$|A_1 . A_2A_3A_4A_6| = |A_5 . A_2A_3A_4A_6|$$

und also, weil B_1 auf der Graden A_1A_2 und der auf der Graden A_1A_6 liegende Punkt B_3 zugleich auch auf der Graden A_3A_4 und ferner B_1 auf der Graden A_5A_4 und der auf der Graden A_5A_6 liegende Punkt B_2 auch auf der Graden A_2A_3 liegt,

$$|B_1 . A_2A_3A_4B_3| = |B_1 . A_2A_3A_4B_2|,$$

wonach in der That offenbar B_1, B_2, B_3 als Punkte einer Graden erscheinen.

Ebenso wird der diesem, dem **Pascalschen Satze** entsprechende **Brianchonsche Satz** bewiesen: **Die drei Verbindungslinien der gegenüberliegenden Eckpunkte eines jeden durch sechs Grade des Kegelschnitts bestimmten Sechsecks gehen durch einen Punkt.**

Den folgenden metrischen Sätzen schicken wir die Bemerkung voraus, dass eine Grade des Kegelschnitts die Verbindungslinie zweier zusammenfallender (unendlich naher) Punkte desselben und ein Punkt des Kegelschnitts der Durchschnittspunkt zweier zusammenfallender Graden desselben ist, und dass das Doppelverhältniss von vier Punkten, wenn einer von ihnen ein unendlich ferner Punkt ist, sich auf ein einfaches Verhältniss reducirt.

Es ist, wenn A_1, A_2, A_3, A_4 vier Punkte des Kegelschnitts sind,

$$|A_3 . A_1A_2A_3A_4| = |A_4 . A_1A_2A_3A_4|$$

und demgemäss, wenn B_1, B_2, A, B die auf den Graden A_3A_1, A_3A_2, A_3A_3, A_3A_4 liegenden Punkte einer Graden und B'_1, B'_2, B', A' die auf den Graden A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3, A_4A_4 liegenden Punkte derselben oder einer andern Graden bezeichnen,

$$(B_1B_2AB) = (B'_1B'_2B'A');$$

folglich ist, wenn A_3 und A_4 die unendlich fernen Punkte des Kegelschnitts sind, weil dann auch B und B' unendlich ferne Punkte sind, $\frac{B_1A}{B_2A} = \frac{B'_2A'}{B'_1A'}$ oder

$$AB_1 . A'B'_1 = AB_2 . A'B'_2$$

und also das Product aus der Entfernung der Durchschnittspunkte einer der harmonischen Hauptdiametrallinien und der ihr parallelen Graden eines Punktes des Kegelschnitts mit einer Graden und der Entfernung der Durchschnittspunkte der andern harmonischen Hauptdiametrallinie und der ihr parallelen Graden desselben Punktes mit derselben oder einer andern Graden für jede Lage des Punktes constant.

Ferner ist, wenn A_1, A_2, A_3, A_4 vier Grade des Kegelschnitts und B_1, B_2, B_3, B_4 die Durchschnittspunkte derselben mit einer Graden B des Kegelschnitts bezeichnen,

$$(B . A_1A_2A_3A_4) = (B_1B_2B_3B_4)$$

und somit für den Fall der Parabel, wenn A_4 die unendlich ferne Grade derselben ist, gleich $B_1B_3 : B_2B_3$. Drei Grade der Parabel bestimmen daher auf jeder vierten Graden derselben drei Punkte B_1, B_2, B_3 von der Eigenschaft, dass $B_1B_3 : B_2B_3$ constant ist.

Endlich bemerken wir, dass

$$(A_3 . A_1A_2A_3A_4) = (A_4 . A_1A_2A_3A_4)$$

und folglich, wenn wir die auf der Graden A_3 liegenden Durchschnittspunkte durch B_1, B_2, A, M und die auf der Graden A_4 liegenden durch B'_1, B'_2, M, A' bezeichnen,

$$(B_1B_2AM) = (B'_1B'_2MA')$$

ist; es ist demnach, wenn A_3 und A_4 die harmonischen Hauptdiametrallinien sind, weil dann A und A' die unendlich fernen Punkte des Kegelschnitts sind, $\frac{B_2M}{B_1M} = \frac{B'_1M}{B'_2M}$ oder

$$MB_1 . MB'_1 = MB_2 . MB'_2$$

und dadurch, da offenbar M das Centrum des Kegelschnitts ist, der Satz erwiesen: Jede Grade des Kegelschnitts bestimmt auf den harmonischen Hauptdiametral-

linien Punkte, deren Entfernungen vom Centrum dasselbe Product ergeben.

48. Zwei Kegelschnitte haben im Allgemeinen vier gemeinschaftliche Punkte und Grade, und da zu diesen stets ein in Bezug auf sie sich selbst polar conjugirtes Dreieck als Diagonaldreieck gehört, so sind sie z. B. in Punktcoordinaten durch die Gleichungen

$$a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 = 0, \quad a'_{11}\alpha_1^2 + a'_{22}\alpha_2^2 + a'_{33}\alpha_3^2 = 0$$

und folglich, da

$$\Delta^3 = -a_{11}a_{22}a_{33}, \quad \Delta'^3 = -a'_{11}a'_{22}a'_{33}$$

$$3\Theta' = \Delta^3\left(\frac{a'_{11}}{a_{11}} + \frac{a'_{22}}{a_{22}} + \frac{a'_{33}}{a_{33}}\right), \quad 3\Theta = \Delta'^3\left(\frac{a_{11}}{a'_{11}} + \frac{a_{22}}{a'_{22}} + \frac{a_{33}}{a'_{33}}\right)$$

und demgemäss, wenn $a'_{11} = \mu_1 a_{11}$, $a'_{22} = \mu_2 a_{22}$, $a'_{33} = \mu_3 a_{33}$ gesetzt wird,

$$\frac{\Delta'^3}{\Delta^3} = \mu_1\mu_2\mu_3, \quad \frac{3\Theta'}{\Delta^3} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3,$$

$$\frac{3\Theta}{\Delta^3} = \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2$$

ist, in der Form

$$a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 = 0, \quad a_{11}\mu_1\alpha_1^2 + a_{22}\mu_2\alpha_2^2 + a_{33}\mu_3\alpha_3^2 = 0$$

darstellbar, in der μ_1, μ_2, μ_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\Delta^3\mu^3 - 3\Theta'\mu^2 + 3\Theta\mu - \Delta'^3 = 0$$

sind.

Zunächst bemerken wir, dass der Kegelschnitt $F' = 0$ in derselben Weise darstellbar ist, indem nämlich

$$2\Delta' F' = -\Delta^2\,(a_{11}\mu_1(\mu_2 + \mu_3)\alpha_1^2 + a_{22}\mu_2(\mu_3 + \mu_1)\alpha_2^2 + a_{33}\mu_3(\mu_1 + \mu_2)\alpha_3^2)$$

ist, und geben als zu den an diese Thatsache sich knüpfenden Entwickelungen nöthig die nachstehenden leicht ableitbaren Formeln:

$$\Delta^{12}.(\mu_2 - \mu_3)^2(\mu_3 - \mu_1)^2(\mu_1 - \mu_2)^2$$
$$= 27.(4(\Delta^3\Theta - \Theta'^2)(\Delta'^3\Theta' - \Theta^2) - (\Delta^3\Delta'^3 - \Theta\Theta')^2)$$

$$\Delta^6.(\mu_2 + \mu_3)(\mu_3 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2) = 9\Theta\Theta' - \Delta^3\Delta'^3$$

$$\Delta^6.(\mu_2\mu_3(\mu_2 + \mu_3) + \mu_3\mu_1(\mu_3 + \mu_1) + \mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2))$$
$$= 3(3\Theta\Theta' - \Delta^3\Delta'^3)$$

$$\Delta^6.((\mu_2 + \mu_3)(\mu_3 + \mu_1) + (\mu_3 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)$$
$$+ (\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)) = 3(\Delta^3\Theta + 3\Theta'^2)$$

$$\Delta^6 . (\mu_1\mu_2(\mu_2+\mu_3)(\mu_3+\mu_1)+\mu_2\mu_3(\mu_3+\mu_1)(\mu_1+\mu$$
$$+\mu_3\mu_1(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+\mu_3)) = 3(\Delta'^3\Theta' + 3\Theta$$
$$\Delta^6 . (\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2) = 3(3\Theta'^2 - 2\Delta^3\Theta)$$
$$\Delta^6 . (\mu_2^2\mu_3^2+\mu_3^2\mu_1^2+\mu_1^2\mu_2^2) = 3(3\Theta^2 - 2\Delta'^3\Theta').$$

Die kubische Discriminante der Gleichung 2F′
ist nach der zweiten dieser Formeln

$$\mathsf{\Delta}_1^2 = \Delta^3\mathsf{\Delta}^3 - 9\Theta\Theta' = \Delta^3\mathsf{\Delta}^3 - 9\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}'.$$

Ferner findet man aus den in Bezug auf die Gleichung
S = 0, S′ = 0, 2F′ = 0 gebildeten Functionen

$$\mathsf{A} = \Delta(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}),\ \mathsf{A}' = \Delta(\alpha_{11}\mu_2\mu_3+\alpha_{22}\mu_3\mu_1$$
$$+\alpha_{33}\mu_1\mu_2),\ \Delta'^2\mathsf{A}_1 = \Delta^5(\alpha_{11}\mu_2\mu_3(\mu_3+\mu_1)(\mu_1+\mu_2)$$
$$+\alpha_{22}\mu_3\mu_1(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+\mu_3)$$
$$+\alpha_{33}\mu_1\mu_2(\mu_2+\mu_3))\mu_3+\mu_1))$$

durch Elimination die Gleichungen

$$\Delta'^2\mathsf{A}_1 - \mu_1\mu_2\mu_3(\mu_2+\mu_3)\Delta^4\mathsf{A} - \mu_1(\mu_2+\mu_3)\Delta^4\mathsf{A}' =$$
$$-\mu_2\mu_3(\mu_3-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)\Delta^5\alpha_{11},\ \text{u. s. f.}$$

und aus diesen durch Multiplication vermittelst der gegebenen
Formeln die Gleichung

$$\Delta^6\Delta'^6\mathsf{A}_1'^3 - 6\Delta^4\Delta'^4(\Delta^3\Theta\mathsf{A}' + \Delta'^3\Theta'\mathsf{A})\mathsf{A}_1^2$$
$$+3\Delta^2\Delta'^2(\Delta^6(\Delta'^3\Theta'+3\Theta^2)\mathsf{A}'^2 - \Delta^3\Delta'^3(\Delta^3\Delta'^3-9\Theta\Theta')\mathsf{A}'\mathsf{A}$$
$$+\Delta'^6(\Delta^3\Theta+3\Theta'^2)\mathsf{A}^2)\mathsf{A}_1 + \Delta^3\Delta'^3(\Delta^3\Delta'^3-9\Theta\Theta')(\Delta^6\mathsf{A}'^3$$
$$+3\Delta^3\Theta\mathsf{A}'^2\mathsf{A} + 3\Delta'^3\Theta'\mathsf{A}'\mathsf{A}^2 + \Delta'^6\mathsf{A}^3)$$
$$-27\Delta^6\Delta'^6(4(\Delta^3\Theta - \Theta'^2)(\Delta'^3\Theta' - \Theta^2)$$
$$-(\Delta^3\Delta'^3 - \Theta\Theta')^2) = 0.$$

Bemerken wir, dass der Invariantenexponent der kubischen Discriminante der Gleichung 2F′ = 0 nach dem gegebenen Ausdrucke 8 ist, und dass demnach, weil die Functionen Δ^3 und A nach dem 40. Abschnitte in der Beziehung zu einander stehen, dass $J^2\mathsf{A} = \dot{J}^2\nu^2\dot{\mathsf{A}}$, $J^4\Delta^3 = \dot{J}^4\nu^3\dot{\Delta}^3$ ist, für diese Function $\dot{J}^4\nu = J^4$ und daher der Invariantenexponent der Function A'_1 6 ist, so überzeugt man sich sofort durch Zählung der Invariantenexponenten, dass abweichend von den bisherigen Gleichungen in dieser Gleichung die Summe derselben nicht constant, nämlich für die vier ersten Glieder 34, für das letzte aber nur 32 ist. Es ist daher die Gleichung in dieser Form nicht allgemein gültig; sie wird es erst durch die Umformung für ein anderes Fundamentaldreieck und nimmt dann, wenn wir den Flächeninhalt dieses beliebigen Dreiecks wie bisher

durch J und den **Flächeninhalt des in Bezug auf die Kegelschnitte** $S = 0$ **und** $S' = 0$ **sich selbst polar conjugirten Dreiecks** — wir zeigen gleich, dass es nur ein einziges solches Dreieck giebt — durch $\mathbf{J}'$ bezeichnen, die die Grösse dieses Flächeninhaltes anzeigende Form

$$\begin{aligned}&\mathbf{J}'^2 . \big(\Delta^6 \Delta'^6 \mathcal{A}'^3_1 - 6\Delta^4 \Delta'^4 (\Delta^3 \Theta \mathcal{A}' + \Delta'^3 \Theta \mathcal{A}') \mathcal{A}'^2_1 \\ &+ 3\Delta^2 \Delta'^2 (\Delta^6 (\Delta'^3 \Theta' + 3\Theta^2) \mathcal{A}'^2 - \Delta^3 \Delta'^3 (\Delta^3 \Delta'^3 - 9\Theta\Theta') \mathcal{A}' \mathcal{A} \\ &+ \Delta'^6 (\Delta^3 \Theta + 3\Theta'^2) \mathcal{A}^2) \mathcal{A}'_1 + \Delta^3 \Delta'^3 (\Delta^3 \Delta'^3 - 9\Theta\Theta') (\Delta^6 \mathcal{A}'^3 \\ &+ 3\Delta^3 \Theta \mathcal{A}'^2 \mathcal{A} + 3\Delta'^3 \Theta' \mathcal{A}' \mathcal{A}^2 + \Delta'^6 \mathcal{A}^3)\big) \\ &- 27 J^2 \Delta^6 \Delta'^6 (4(\Delta^3 \Theta - \Theta'^2)(\Delta'^3 \Theta' - \Theta^2) - (\Delta^3 \Delta'^3 - \Theta\Theta')^2) = 0\end{aligned}$$

an.

In derselben Weise kommt man von den Gleichungen

$$\begin{aligned}&\mathcal{A} = s_1^2 a_{11} + s_2^2 a_{22} + s_3^2 a_{33}, \quad \mathcal{A}' = s_1^2 a_{11} \mu_1 + s_2^2 a_{22} \mu_2 + s_3^2 a_{33} \mu_3, \\ &\Delta' \mathcal{A}'_1 = - \Delta^2 (s_1^2 a_{11} \mu_1 (\mu_2 + \mu_3) + s_2^2 a_{22} \mu_2 (\mu_3 + \mu_1) \\ &\qquad\qquad + s_3^2 a_{33} \mu_3 (\mu_1 + \mu_2))\end{aligned}$$

zunächst auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}&\Delta' \mathcal{A}'_1 + \mu_2 \mu_3 \Delta^2 \mathcal{A} + \mu_1 \Delta^2 \mathcal{A}' = \\ &\qquad - \Delta^2 (\mu_3 - \mu_1)(\mu_1 - \mu_2) s_1^2 a_{11}, \text{ u. s. f.}\end{aligned}$$

und dann mit Rücksicht darauf, dass der Invariantenexponent der Grösse $\mathcal{A}'_1$ 4 ist, auf die **den Radius des dem in Bezug auf die Kegelschnitte** $S = 0$ **und** $S' = 0$ **sich selbst polar conjugirten Dreieck umschriebenen Kreises** — wir bezeichnen ihn durch $\mathbf{r}'$ — bestimmende Gleichung

$$\begin{aligned}&\mathbf{J}'^2 . (\Delta^3 \Delta'^3 \mathcal{A}'^3_1 + 3\Delta^2 \Delta'^2 (\Theta \mathcal{A} + \Theta' \mathcal{A}') \mathcal{A}'^2_1 + 3\Delta\Delta' (\Delta^3 \Theta \mathcal{A}'^2 \\ &- (\Delta^3 \Delta'^3 - 3\Theta\Theta') \mathcal{A}' \mathcal{A} + \Delta'^3 \Theta' \mathcal{A}^2) \mathcal{A}'_1 + \Delta^6 \Delta'^3 \mathcal{A}'^3 \\ &- 3\Delta^3 (2\Delta'^3 \Theta' - 3\Theta^2) \mathcal{A}'^2 \mathcal{A} - 3\Delta'^3 (2\Delta^3 \Theta - 3\Theta') \mathcal{A}' \mathcal{A}^2 \\ &+ \Delta'^6 \Delta^3 \mathcal{A}^2) - 432 \mathbf{r}'^2 J^4 (4(\Delta^3 \Theta - \Theta'^2)(\Delta^3 \Theta' - \Theta^2) \\ &\qquad - (\Delta^3 \Delta'^3 - \Theta\Theta')^2) = 0.\end{aligned}$$

Endlich bemerken wir, dass die Pole der Seitenlinien des in diesem Abschnitte als Fundamentaldreieck angenommenen Dreiecks in Bezug auf die Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$ und $F' = 0$ nach deren Gleichungen die entsprechenden Eckpunkte desselben sind, und dass demnach die Polaren eines jeden Punktes einer jeden Seitenlinie in Bezug auf die bezeichneten Kegelschnitte durch den entsprechenden Eckpunkt gehen. **Der Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf drei**

Kegelschnitte $S=0$, $S'=0$ und $S''=0$ durch einen Punkt gehen, ist nun allgemein, wie aus den Formen der Polaren eines Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ in Bezug auf diese Kegelschnitte sofort erhellt, durch die gleich Null gesetzte sogenannte Jacobische Determinante der drei Kegelschnitte

$$\begin{vmatrix} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+a_{13}\alpha_3, & a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+a_{23}\alpha_3, & a_{31}\alpha_1+a_{32}\alpha_2+a_{33}\alpha_3 \\ a'_{11}\alpha_1+a'_{12}\alpha_2+a'_{13}\alpha_3, & a'_{21}\alpha_1+a'_{22}\alpha_2+a'_{23}\alpha_3, & a'_{31}\alpha_1+a'_{32}\alpha_2+a'_{33}\alpha_3 \\ a''_{11}\alpha_1+a''_{12}\alpha_2+a''_{13}\alpha_3, & a''_{21}\alpha_1+a''_{22}\alpha_2+a''_{23}\alpha_3, & a''_{31}\alpha_1+a''_{32}\alpha_2+a''_{33}\alpha_3 \end{vmatrix}$$

dargestellt, da sie die Bedingung ist, unter welcher sich jene Polaren in einem Punkte schneiden, und demnach eine Curve dritten Grades. Für die Kegelschnitte $S=0$, $S'=0$ und $2F'=0$ degenerirt sie, da für sie die Jacobische Determinante unter Voraussetzung des in diesem Abschnitte angenommenen Fundamentaldreiecks die Form

$$-\frac{\Delta^5(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)}{\Delta'}\cdot\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

annimmt, in drei Grade, in ein Tripel von in Bezug auf sie polar conjugirten Graden; und es existirt demnach nothwendig in der That im Allgemeinen nur ein einziges Dreieck, das in Bezug auf die Kegelschnitte $S=0$ und $S'=0$ sich selbst polar conjugirt ist. Nach den aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} S &= a_{11}\alpha_1^2+a_{22}\alpha_2^2+a_{33}\alpha_3^2,\\ S' &= a_{11}\mu_1\alpha_1^2+a_{22}\mu_2\alpha_2^2+a_{33}\mu_3\alpha_3^2,\\ 2\Delta'F' &= -\Delta^2\,(a_{11}\mu_1(\mu_2+\mu_3)\alpha_1^2+a_{22}\mu_2(\mu_3+\mu_1)\alpha_2^2\\ &\qquad +a_{33}\mu_3(\mu_1+\mu_2)\alpha_3^2) \end{aligned}$$

hervorgehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\Delta'F'+\mu_2\mu_3\Delta^2S+\mu_1\Delta^2S' &=\\ &-\Delta^2(\mu_3-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)\,a_{11}\alpha_1^2, \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

ist allgemein das mit $\Delta^2\Delta'^2$ multiplicirte Quadrat der Jacobischen Determinante der Kegelschnitte $S=0$, $S'=0$ und $2F'=0$

$$\begin{aligned} &8\Delta^3\Delta'^3F'^3+12\Delta^2\Delta'^2(\Theta S+\Theta'S')F'^2+6\Delta\Delta'(\Delta^3\Theta S'^2\\ &-(\Delta^3\Delta'^3-3\Theta\Theta')SS'+\Delta'^3\Theta'S^2)F'+\Delta^6\Delta'^3S'^3\\ &-3\Delta^3(2\Delta'^3\Theta'-3\Theta^2)S'^2S-3\Delta'^3(2\Delta^3\Theta-3\Theta'^2)S'S^2\\ &+\Delta^3\Delta'^6S^3. \end{aligned}$$

Selbstverständlich erhält man ebenso, wenn man in entsprechender Weise die Kegelschnitte S = 0 und S′ = 0 in Liniencoordinaten darstellt, analoge Entwickelungen in Bezug auf die Gleichung $2\Phi' = 0$; sie unterscheiden sich von den gegebenen dadurch, dass, wo in diesen Θ, Θ', S, S′, F′, Δ'_1, A'_1, A'_1 steht, in jenen Θ, Θ', Σ, Σ', Φ' und die in Bezug auf die Gleichung $2\Phi' = 0$ gebildeten Functionen Δ'_2, A'_2, A'_2 stehen.

Die Polarcurve des Kegelschnitts S′ = 0 in Bezug auf den Kegelschnitt S = 0 hat mit diesen Kegelschnitten gleichfalls dasselbe sich selbst polar conjugirte Dreieck, indem

$$\Sigma'_0 = \alpha_{11}\mu_1 a_1^2 + \alpha_{22}\mu_2 a_2^2 + \alpha_{33}\mu_3 a_3^2$$

ist; ihre Discriminante ist, wie daraus sofort zu erkennen ist, die des Kegelschnitts S′ = 0; sie selbst ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem das Centrum des Kegelschnitts S = 0 mit dem Kegelschnitt S′ = 0 zwei imaginäre, eine oder zwei reelle Grade gemein hat, da die in Bezug auf das Centrum (α_{11}, α_{22}, α_{33}) und den Kegelschnitt S′ = 0 gebildete Function $3\Theta'$

$$\Delta' (a_{11}\mu_1\alpha_{11}^2 + a_{22}\mu_2\alpha_{22}^2 + a_{33}\mu_3\alpha_{33}^2)$$
$$= \Delta^2\Delta' (\alpha_{11}\mu_1 + \alpha_{22}\mu_2 + \alpha_{33}\mu_3) = \Delta^2 A'_0$$

ist, oder je nachdem auf der Polare des Centrums des Kegelschnitts S = 0 in Bezug auf den Kegelschnitt S′ = 0

$$|\mu_1, \mu_2, \mu_3|$$

zwei imaginäre, ein oder zwei reelle Punkte dieses Kegelschnitts liegen. In der That sind die Pole der durch das Centrum des Kegelschnitts S = 0 gehenden Graden des Kegelschnitts S′ = 0 in Bezug auf den Kegelschnitt S = 0 die unendlich fernen Punkte des Polarkegelschnitts und die Polaren der ihnen zugehörigen Punkte des Kegelschnitts S′ = 0 die harmonischen Hauptdiametrallinien desselben; der in Bezug auf den Kegelschnitt S = 0 bestimmte Pol der Polare des Centrums des Kegelschnitts S = 0 in Bezug auf den Kegelschnitt S′ = 0 ist darnach das Centrum des Polarkegelschnitts.

Die Polarcurve eines elliptischen Kreises in Bezug auf einen elliptischen Kreis ist ein Kegelschnitt, dessen ein Brennpunkt das Centrum des

letzteren und dessen zu ihm gehörige Leitlinie die Polare des Centrums des ersteren in Bezug auf den letzteren Kreis ist; denn einerseits sind die Polaren der unendlich fernen Punkte des Kreises $S' = 0$ als der imaginären Kreispunkte die harmonischen Hauptdiametrallinien des Kreises $S = 0$ und daher dessen Centrum der Durchschnittspunkt zweier durch die imaginären Kreispunkte gehender Graden des Polarkegelschnitts oder ein Brennpunkt desselben, und andererseits sind die Pole der harmonischen Hauptdiametrallinien des Kreises $S' = 0$ die Durchschnittspunkte der Polare seines Centrums und jener Graden des Polarkegelschnitts und also diese Polare die zu dem Brennpunkte gehörige Leitlinie.

Weiter sei an dieser Stelle der folgende Satz bemerkt. *Die Polarcurve einer Parabel in Bezug auf einen hyperbolischen Kreis, dessen Centrum ein Punkt ihrer elliptischen Leitlinie ist, ist ein hyperbolischer Kreis*; denn es ist, da die Form $(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33})$ das Centrum und die Form $|s_2^2\alpha_{33}\mu_1\mu_2 + s_3^2\alpha_{22}\mu_3\mu_1, s_3^2\alpha_{11}\mu_2\mu_3 + s_1^2\alpha_{33}\mu_1\mu_2, s_1^2\alpha_{22}\mu_3\mu_1 + s_2^2\alpha_{11}\mu_2\mu_3|$ die Leitlinie bezeichnet,

$$(s_1^2\alpha_{22}\alpha_{33} + s_2^2\alpha_{33}\alpha_{11} + s_3^2\alpha_{11}\alpha_{22})(\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2)$$
$$- (s_1^2\alpha_{22}\alpha_{33}\mu_2\mu_3 + s_2^2\alpha_{33}\alpha_{11}\mu_3\mu_1 + s_3^2\alpha_{11}\alpha_{22}\mu_1\mu_2) = 0$$

oder

$$-3\Theta A + \Delta'\Delta^2 A'_0 = 0$$

und also in der That $A'_0 = 0$ für $A = 0$.

Im Anschluss hieran heben wir noch besonders das sogenannte *Prinzip der Polarreciprocität* hervor, nach dem auf Grund der Sätze: Jedem Punkte entspricht in Bezug auf einen Kegelschnitt als Polare eine Grade; den Punkten einer Graden entsprechen als Polaren Grade eines Punktes; der Verbindungslinie zweier Punkte entspricht als Pol der Durchschnittspunkt der ihnen als Polaren entsprechenden Graden. und der denselben entsprechenden *aus einem bekannten Satze* und zwar vorzugsweise Situationssatze *ein neuer abgeleitet* werden kann, ein Prinzip, das abgesehen von der Beziehung zu einem Kegelschnitt auf Grundgesetzen beruht, wie sie bei dem Prinzip der Dualität herrschen. So ergiebt sich nach diesem Prinzipe ganz ebenso, wie nach dem Prinzip der Dualität z. B. aus dem Satze, dass zwei Dreiecke, welche einen Collineationspunkt haben, auch eine Collineationslinie besitzen, so-

fort der umgekehrte, so aus dem Pascalschen Satze der Brianchonsche und umgekehrt. Es können aber auch nach ihm aus den Eigenschaften z. B. des Kreises Eigenschaften der Kegelschnitte überhaupt auf Grund der oben gemachten Bemerkungen abgeleitet werden; als Beispiel diene der Satz: Die Verbindungslinie des Centrums eines Kreises mit dem Pole einer Graden in Bezug auf ihn ist zu ihr senkrecht., aus dem, wenn man ihm die Form: Die Durchschnittspunkte der unendlich fernen Graden mit einer Graden und der Verbindungslinie ihres Pols mit dem Centrum eines Kreises sind in Bezug auf die imaginären Kreispunkte harmonisch conjugirt. giebt, mit Rücksicht darauf, dass nach ihren Formen das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Graden dem Doppelverhältniss ihrer Polaren gleich ist, der nachstehende Satz folgt: Die Verbindungslinien eines Brennpunkts des Kegelschnitts mit einem Punkte und dem Durchschnittspunkte der Polare desselben mit der zugehörigen Leitlinie sind in Bezug auf seine Verbindungslinien mit den imaginären Kreispunkten harmonisch conjugirt oder also zu einander senkrecht.

Als Anhang zu diesem Abschnitte geben wir schliesslich noch einige die Darstellung zweier Kegelschnitte in einfacher Form betreffende Sätze.

Zwei Kegelschnitte sind, da sie im Allgemeinen vier Punkte gemein haben, in Punktcoordinaten auch durch die Gleichungen

$$2a_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0,$$
$$2a'_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a'_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a'_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0$$

und demgemäss, wie aus den Gleichungen

$$\Delta^3 = -2a_{23}a_{31}a_{12}, \quad \Delta'^3 = -2a'_{23}a'_{31}a'_{12},$$
$$3\Theta' = 2\Delta\,(\alpha_{23}a'_{23} + \alpha_{31}a'_{31} + \alpha_{12}a'_{12}),$$
$$3\Theta = 2\Delta'\,(\alpha'_{23}a_{23} + \alpha'_{31}a_{31} + \alpha'_{12}a_{12})$$

zu ersehen ist, in der Form

$$2a_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0,$$
$$2a_{23}\mu_1\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\mu_2\alpha_3\alpha_1 + 2a_{12}\mu_3\alpha_1\alpha_2 = 0$$

darstellbar, in der μ_1, μ_2, μ_3 die Wurzeln der im Eingange dieses Abschnitts gegebenen Gleichung sind; in Liniencoordinaten können sie natürlich in analoger Form gleichfalls dargestellt werden.

Auch lassen sich zwei Kegelschnitte in Punktcoordinaten in der Form

$$a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 = 0,$$

$$2a'_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a'_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2a'_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0$$

oder in Liniencoordinaten in der Form

$$\alpha_{11}a_1^2 + \alpha_{22}a_2^2 + \alpha_{33}a_3^2 = 0,$$

$$2\alpha'_{23}a_2a_3 + 2\alpha'_{31}a_3a_1 + 2\alpha'_{12}a_1a_2 = 0$$

darstellen, wenn $\boldsymbol{\Theta} = \Theta' = 0$ oder resp. $\Theta = \boldsymbol{\Theta}' = 0$ ist. Die Invarianten $\boldsymbol{\Theta}$ und Θ' haben darnach den Werth Null, wenn der Kegelschnitt $S' = 0$ durch die Eckpunkte eines in Bezug auf den Kegelschnitt $S = 0$ sich selbst polar conjugirten Dreiecks geht, und ebenso die Invarianten Θ und $\boldsymbol{\Theta}'$ diesen Werth, wenn er an den Seitenlinien eines solchen Dreiecks liegt. Die geometrische Bedeutung des Verschwindens der genannten Invarianten im Degenerationsfalle des Kegelschnitts ist von selbst erhellend, zum Theil ausdrücklich auch schon angegeben worden.

49. In dem vorigen Abschnitte ist darauf hingewiesen, dass aus einem Satze nach dem Prinzip der Polarreciprocität in ähnlicher Weise, wie nach dem Prinzip der Dualität ein neuer abgeleitet werden kann; das Prinzip der Dualität giebt aber im Verein mit dem Prinzip der Continuität noch ein Mittel an, um von einem Satze zu einem neuen, und zwar von einem speciellen, z. B. für die Kreise und die Parabel geltenden Satze zu einem allgemeineren zu gelangen. Wir erinnern an den Schlusspassus des 21. Abschnitts des ersten Theils und zeigen die Art und Weise, Sätze zu verallgemeinern, an mehreren nachstehenden Beispielen.

Aus dem ganz elementaren Satze: Wenn zwei Dreiecke die unendlich ferne Grade zur Collineationslinie haben, so haben sie einen Collineationspunkt. ergiebt sich nach dem Prinzip der Dualität der Satz: Wenn zwei Dreiecke den endlich fernen Punkt zum Collineationspunkt haben, so haben sie eine Collineationslinie. und damit, da jeder Punkt als endlich ferner Punkt angesehen werden kann, der allgemeine Satz: Wenn zwei Dreiecke einen Collineationspunkt haben, so haben sie auch eine Collineationslinie. und aus diesem wieder nach dem Prinzip der Dualität der umgekehrte.

Der Satz: Die Verbindungslinie des Centrums eines Kreises

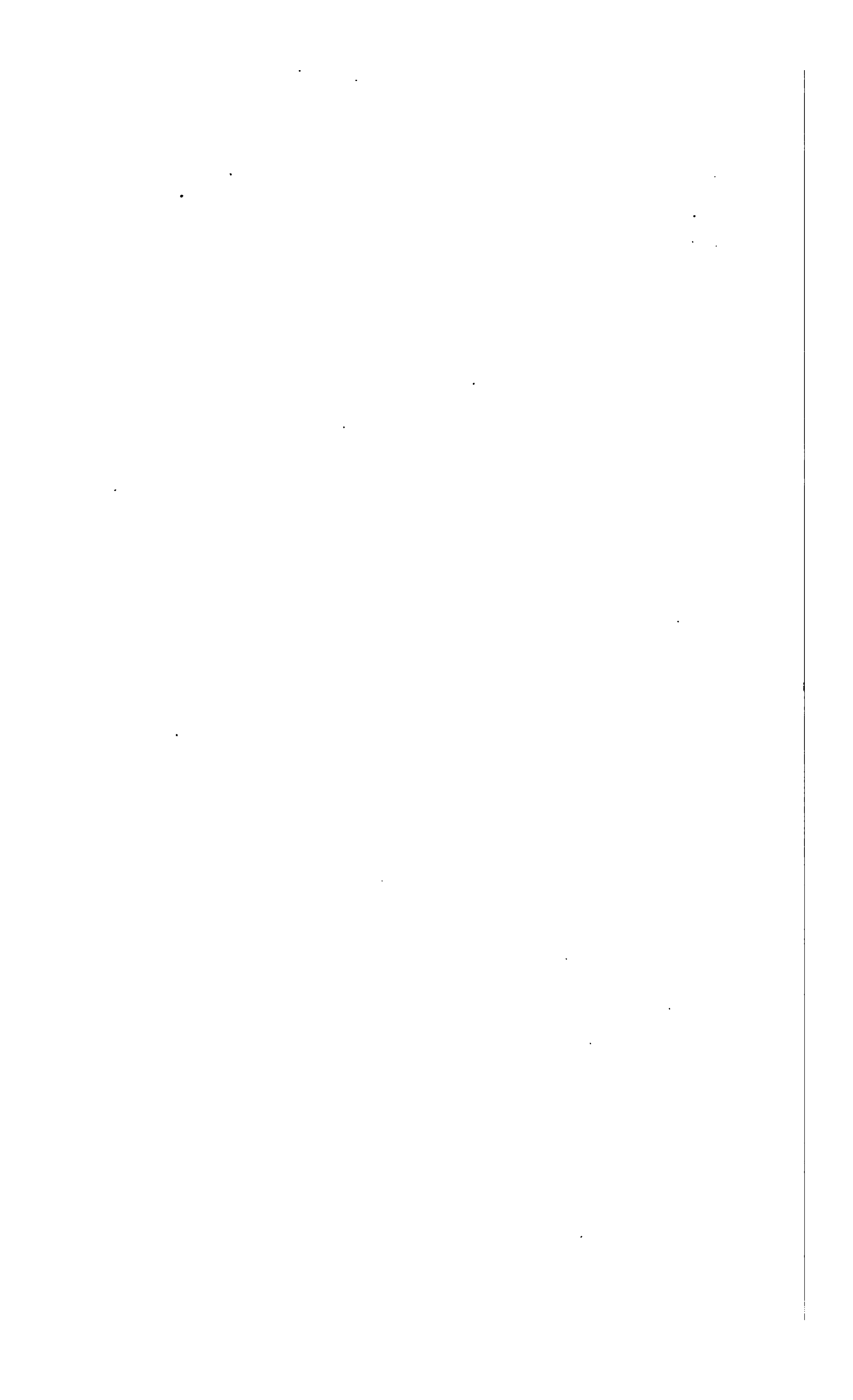
mit dem Pole einer Graden ist zu dieser senkrecht. liefert nach dem Prinzip der Dualität den Satz: Der Durchschnittspunkt der Centrale eines relativen Kreises mit der Polare eines Punktes ist zu diesem senkrecht. oder in andern Worten den Satz: Die durch den endlich fernen Punkt gehenden Graden eines Punktes und des Durchschnittspunktes der Polaren dieser Punkte in Bezug auf einen relativen Kreis sind harmonisch conjugirt in Bezug auf die durch ihn gehenden Graden — die imaginären Kreislinien — desselben. Es gilt daher der Satz: Die durch einen Punkt gehenden Graden eines Punktes und des Durchschnittspunktes der Polaren dieser Punkte in Bezug auf einen Kegelschnitt sind harmonisch conjugirt in Bezug auf die durch ihn gehenden Graden desselben., da dem endlich fernen Punkte offenbar stets eine solche Lage gegeben werden kann, dass ein Kegelschnitt zum relativen Kreise wird, nach dem Prinzip der Continuität ganz allgemein und nach dem Prinzip der Dualität der entsprechende Satz: Die auf einer Graden liegenden Punkte einer Graden und der Verbindungslinie der Pole dieser Graden in Bezug auf einen Kegelschnitt sind harmonisch conjugirt in Bezug auf die auf ihr liegenden Punkte desselben.

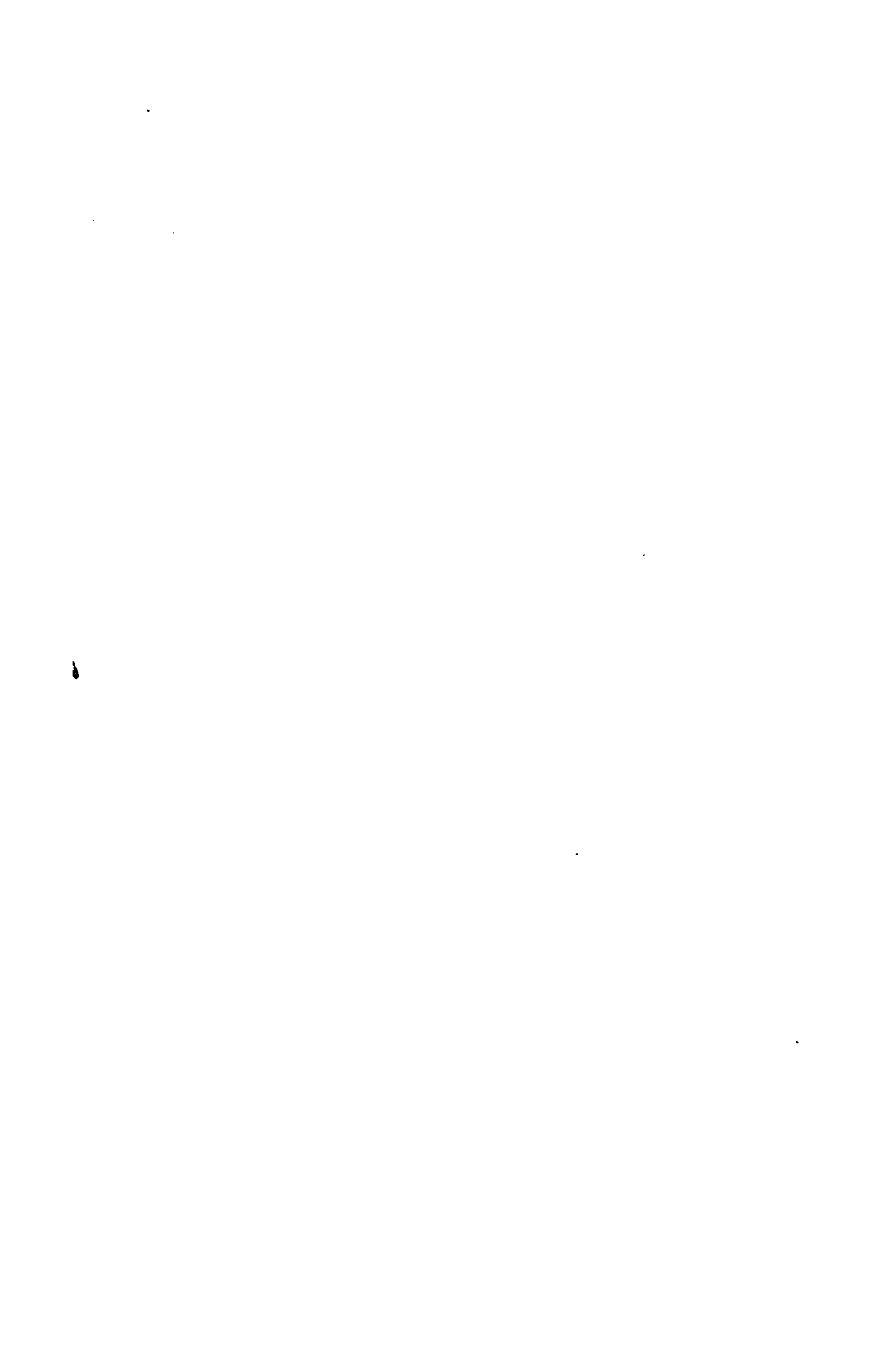
In gleicher Weise sind so aus dem Satze: Der durch die Durchschnittspunkte dreier Graden der Parabel gehende Kreis geht durch den Brennpunkt derselben. mit Rücksicht darauf, dass dieser Brennpunkt und die imaginären Kreispunkte gleichfalls Durchschnittspunkte dreier Graden der Parabel sind, die Sätze: Die Eckpunkte zweier dem Kegelschnitt umschriebener Dreiecke liegen auf einem Kegelschnitte. Die Seitenlinien zweier dem Kegelschnitt eingeschriebener Dreiecke liegen an einem Kegelschnitte. und aus dem Satze: Der einem in Bezug auf den hyperbolischen Kreis sich selbst polar conjugirten Dreieck umschriebene Kreis geht durch sein Centrum. im Hinblick darauf, dass das Centrum des hyperbolischen Kreises und die imaginären Kreispunkte als polar conjugirt in Bezug auf ihn Eckpunkte eines in Bezug auf ihn sich selbst polar conjugirten Dreiecks sind, der Satz: Die Eckpunkte zweier in Bezug auf den Kegelschnitt sich selbst polar conjugirter Dreiecke liegen auf einem Kegelschnitte und ebenso die Seitenlinien an einem solchen. zu entnehmen.

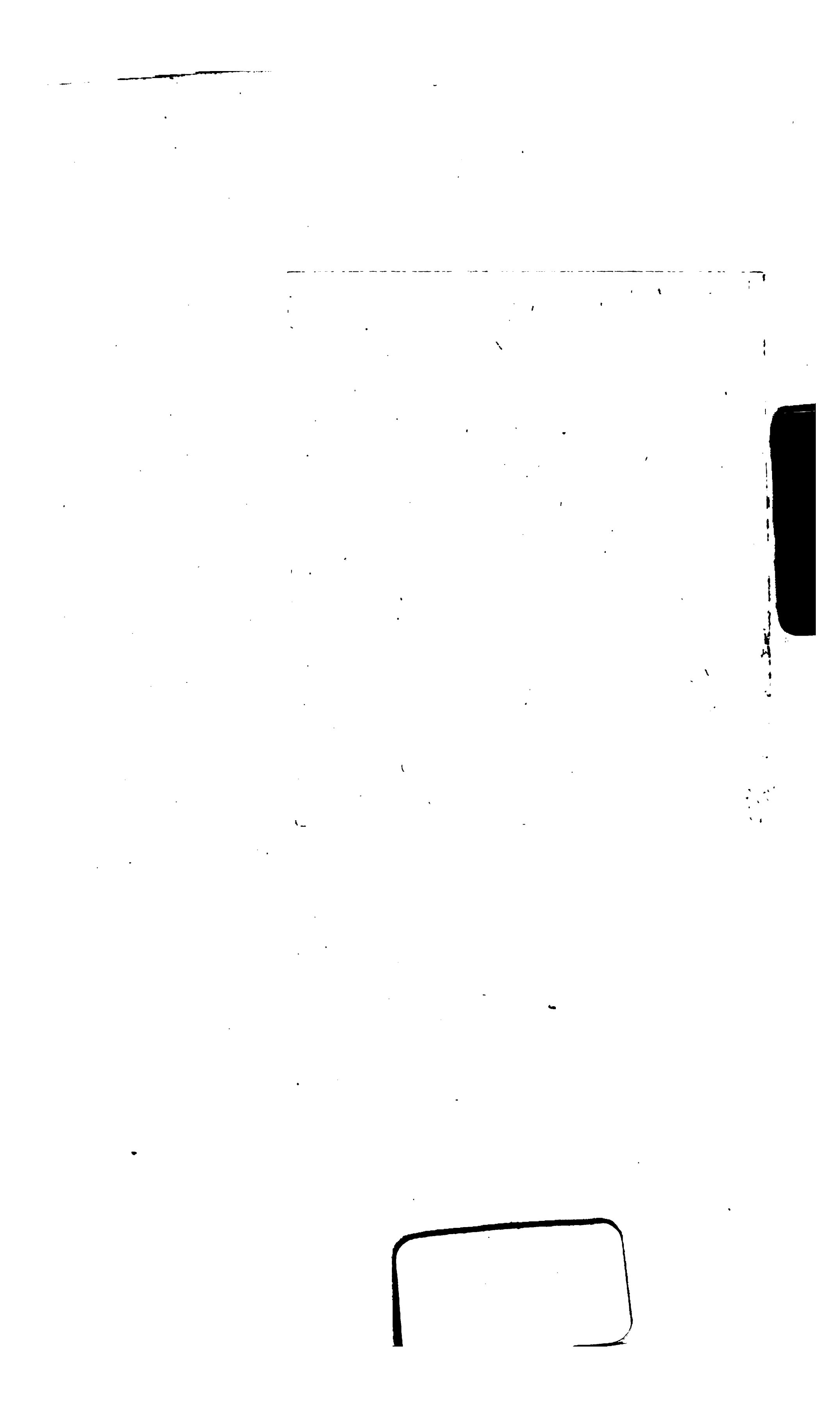
Schlussbemerkung.

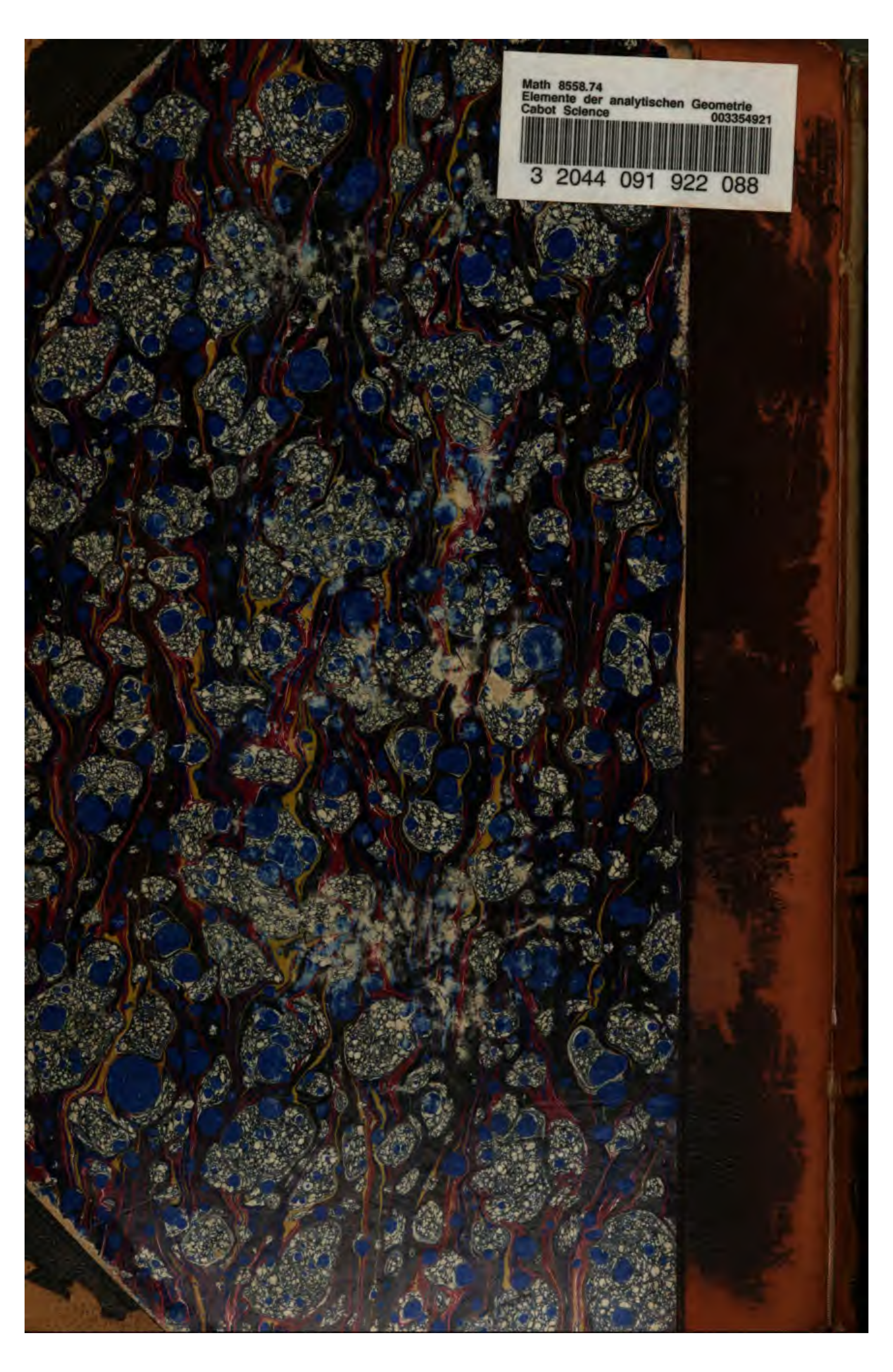
50. Wir sind am Ende unserer Untersuchungen. Werfen wir noch einen Blick zurück auf dieselben, so fällt uns vor Allem in die Augen die durch die ganze Schrift hindurch sich manifestirende Dualität. Da treten uns die Begriffe positiv und negativ, reell und imaginär, harmonisch und anharmonisch, polar und apolar entgegen, da sehen wir als zusammengehörig und einander entsprechend die Elementargebilde Punkt und Grade und unter den Kegelschnitten die geometrischen Gebilde Ellipse und Hyperbel und insbesondere den elliptischen und hyperbolischen Kreis. Ja, auch die Kegelschnitte als solche im Allgemeinen erscheinen als der eine Theil eines zweitheiligen Ganzen; der eine Theil dieses Ganzen ist der Kegelschnitt als Ort der sich selbst polar conjugirten Punkte und Graden, der andere Theil der Ort der sich selbst apolar conjugirten Punkte und Graden. Auf diesen Ort aber haben sich unsere Untersuchungen nicht erstreckt, in denen überhaupt die Begriffe apolar und anharmonisch gegen die Begriffe polar und harmonisch und der hyperbolische Kreis gegen den elliptischen mehr zurückgetreten ist. Fragen wir uns nach dem Grunde dieser Erscheinung, so liegt dieser offenbar darin, dass nach den vorliegenden Untersuchungen die Metrik der geometrischen Gebilde, wie wir sie in der realen Welt kennen, von dem elliptischen Kreise abhängt und die Lagenbestimmung des Punktes und der Graden in einer von dieser abhängigen Weise geschehen ist. Sollten wir daher da nicht glauben, dass, wenn es gelänge, die Lage des Punktes und der Graden in einer vom hyperbolischen Kreise oder vielmehr dem ihm entsprechenden Orte der sich selbst apolar conjugirten Punkte und Graden abhängigen entsprechenden Weise zu bestimmen, das Analoge statt hätte, dass dann eine Gleichung zweiten Grades den Ort der sich selbst apolar conjugirten Punkte und Graden darstellen würde?

Druck von Fr. Frommann in Jena.








Math 8558.74
Elemente der analytischen Geometrie
Cabot Science
003354921
3 2044 091 922 088